Analisi Matematica 1 - III Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Provare che $2 \cdot 3^{3n-1} - 7^{2n-1}$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Ne proviamo la validitá per $n \in \mathbb{N}$ grazie al principio di induzione. Infatti $2 \cdot 3^{3n-1} - 7^{2n-1} = 11$ per $n = 1$ è divisibile per 11. Se supponiamo la proprietá vera per n, abbiamo che nel caso $n+1$ possiamo scrivere $2 \cdot 3^{3n+2} - 7^{2n+1}$ come $-22 \cdot 7^{2n-1} + 27(2 \cdot 3^{3n-1} - 7^{2n-1})$, che risulta divisibile per 11 come somma di due numeri entrambi divisibili per 11. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che la proprietá vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [8 punti] Per $A = \{2^{\frac{1}{3n^2+5}} : n \in \mathbb{N}\}$ determinare l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.
Sia $a_n = 2^{\frac{1}{3n^2+5}}$. Siccome $2^{\frac{1}{3n^2+5}} \to 1$ per $n \to +\infty$ in modo decrescente, abbiamo che $\sup A = \max A = a_0 = 2^{\frac{1}{5}}$ e $\inf A = 1$ non è un minimo.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\frac{n^2+\log n}{n^2+1})^{n^2}}{\sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4+1}}$.
Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}(1-e^{\frac{\log n}{n^2}}+\frac{\log n-1}{n^2+1})n^2 = \lim_{n\to+\infty}(-\frac{\log n}{n^2}+\frac{\log n-1}{n^2+1})n^2 = -\lim_{n\to+\infty}(\frac{\log n}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+1}) = -1$$

dagli sviluppi di Taylor dell'esponenziale, osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}(\frac{n^2+\log n}{n^2+1})^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[1+e^{-\frac{\log n}{n^2}}(1-e^{\frac{\log n}{n^2}}+\frac{\log n-1}{n^2+1})\right]^{n^2} = e^{-1}.$$

Tramite razionalizzazione abbiamo quindi che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\frac{n^2+\log n}{n^2+1})^{n^2}}{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(\frac{n^2+\log n}{n^2+1})^{n^2}}{n}[\sqrt{1+n^{-1}}+\sqrt{1+n^{-1}}] = \frac{2}{e}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)\tan(\pi x)}{e^x\log^2 x}$.
Applicando due volte la formula di de l'Hôpital e semplificando opportunamente le quantitá che non producono forme indeterminate otteniamo che

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)\tan(\pi x)}{e^x\log^2 x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)\tan(\pi x)}{\log^2 x} = \frac{1}{4e}\lim_{x\to1}\frac{\tan(\pi x)}{\log x} + \frac{\pi}{2e}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log x} = \frac{\pi}{2e}.$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4+2x}}dx$.
Poniamo $t = \sqrt{x^2-4+2x} - x$, ossia $x = -\frac{t^2+4}{2(t-1)}$ e $dx = -\frac{t^2-2t-4}{2(t-1)^2}dt$. Dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4+2x}}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{t^4+8t^2+16}{(t-1)^3}dt\Big|_{t=\sqrt{x^2-4+2x}-x}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int \frac{t^4+8t^2+16}{(t-1)^3}dt &= -\frac{t^2}{8}-\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}\int [\frac{14}{t-1}+\frac{18}{(t-1)^2}+\frac{17}{(t-1)^3}]dt \\
&= -\frac{t^2}{8}-\frac{3}{4}t-\frac{7}{2}\log|t-1|+\frac{9}{2(t-1)}+\frac{17}{8(t-1)^2}+c.
\end{aligned}$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4+2x}}dx &= -\frac{(\sqrt{x^2-4+2x}-x)^2}{8}-\frac{3}{4}(\sqrt{x^2-4+2x}-x)-\frac{7}{2}\log|\sqrt{x^2-4+2x}-x-1| \\
&+\frac{9}{2(\sqrt{x^2-4+2x}-x-1)}+\frac{17}{8(\sqrt{x^2-4+2x}-x-1)^2}+c.
\end{aligned}$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $x''-2x=16t^2e^{t^2}$ con $x(0)=7$, $x'(0)=\sqrt{2}$.

Risolvendo il polinomio caratteristico $P(\lambda)=\lambda^2-2=0$, otteniamo che $\lambda=\pm\sqrt{2}$ sono due radici distinte e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma $x_{om}=c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}$. Dal metodo di variazione delle costanti cerchiamo la soluzione particolare della forma $\bar{x}=c_1(t)e^{\sqrt{2}t}+c_2(t)e^{-\sqrt{2}t}$, ove $c_1(t)$ e $c_2(t)$ risolvono il sistema

$$c_1'e^{\sqrt{2}t}+c_2'e^{-\sqrt{2}t}=0,\ c_1'e^{\sqrt{2}t}-c_2'e^{-\sqrt{2}t}=8\sqrt{2}t^2e^{t^2}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$c_1(t)=4\sqrt{2}\int t^2e^{t^2-\sqrt{2}t}=\sqrt{2}(2t+\sqrt{2})e^{t^2-\sqrt{2}t},\quad c_2(t)=-4\sqrt{2}\int t^2e^{t^2+\sqrt{2}t}=-\sqrt{2}(2t-\sqrt{2})e^{t^2+\sqrt{2}t}$$

e quindi la soluzione particolare cercata ha la forma $\bar{x}(t)=4e^{t^2}$. La soluzione generale ha la forma $c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+\bar{x}(t)$. Imponendo le condizioni iniziali $x(0)=7$ e $x'(0)=\sqrt{2}$ otteniamo $c_1+c_2+4=7$ e $\sqrt{2}(c_1-c_2)=\sqrt{2}$, che ha soluzioni $c_1=2$ e $c_2=1$. La soluzione richiesta è quindi

$$x(t)=2e^{\sqrt{2}t}+e^{-\sqrt{2}t}+4e^{t^2}.$$

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x)=xe^{\frac{1}{\log x}}$.

Dominio $(0,1)\cup(1,+\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f>0\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$

Asintoti $x=1$ asintoto verticale, no asintoto obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty$$

Monotonia di f

$$f'(x)=e^{\frac{1}{\log x}}\frac{\log^2 x-1}{\log^2 x},\quad \{f'>0\}=(0,e^{-1})\cup(e,+\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = e^{\frac{1}{\log x}} \frac{2\log x - \log^2 x + 1}{x \log^4 x}, \quad \{f'' > 0\} = (e^{1-\sqrt{2}}, 1) \cup (1, e^{\sqrt{2}+1}).$$