Analisi Matematica 1 - IV Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Provare che $3^n \geq 2^{n+1} - 1$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Ne proviamo la validitá per $n \in \mathbb{N}$ grazie al principio di induzione. Infatti $3 = 3^n \geq 2^{n+1} - 1 = 3$ vale per $n = 1$. Se supponiamo la proprietá vera per n, abbiamo che nel caso $n+1$ vale la disuguaglianza $3^{n+1} \geq 3(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} + 2^{n+1} - 3 \geq 2^{n+2} - 1$. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che la proprietá vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [8 punti] Per $A = \{\arctan \frac{n+(-1)^n n+3}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}\}$.
Sia $a_n = \arctan \frac{n+(-1)^n n+3}{n^2+3}$. Siccome $0 < a_n \to 0^+$ per $n \to +\infty$ in modo decrescente, abbiamo che $\sup A = \max A = \max\{a_0, a_1\} = \frac{\pi}{4}$ e $\inf A = 0$ non è un minimo.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n + \Big(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{n^2 \log n}}$.
Poiché

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{n \log n} = \lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\Big)^{n \log n} = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} n \log(1 + \frac{1}{n})} = e$$

dal limite notevole del logaritmo, abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{2^n + \Big(\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{n^2 \log n}} = \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{n \log n} \sqrt[n]{1 + o(1)} = e$$

grazie a

$$\lim_{n \to +\infty} 2^n \Big(\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{-n^2 \log n} = \lim_{n \to +\infty} \Big[2 \Big(\frac{\log(n+1)}{\log n}\Big)^{-n \log n}\Big]^n = 0.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x^2) - \sin^2 x}{\sqrt{1-2x^4} - 1}$.
Tramite razionalizzazione dagli sviluppi di Taylor di logaritmo e seno otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2) - \sin^2 x}{\sqrt{1-2x^4} - 1} &= -\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2 + O(x^6)}{x^4} \\ &= -\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + O(x^6)}{x^4} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.
Poniamo $t = \tan \frac{x}{2}$. Dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{1 - \sin x}{2 + \cos x} dx = 2 \int \frac{t^2 - 2t + 1}{(t^2+1)(t^2+3)} dt \Big|_{t = \tan \frac{x}{2}}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$2\int\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}dt = 2\int[\frac{t+1}{t^2+3}-\frac{t}{t^2+1}]dt = \log\frac{t^2+3}{t^2+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{3}})+c.$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\int\frac{1-\sin x}{2+\cos x}dx = \log\frac{\tan^2(\frac{x}{2})+3}{\tan^2(\frac{x}{2})+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}})+c.$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $3e^t\tan x+\frac{1-e^t}{\cos^2 x}x'=0$ con $x(1)=\frac{\pi}{4}$.
Riscriviamo l'equazione nella forma a variabili separabili:

$$\frac{x'}{\tan x\cos^2 x}=\frac{3e^t}{e^t-1}.$$

Siccome

$$\int_1^t\frac{x'}{\tan x\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)}\frac{dy}{\tan y\cos^2 y}=\log|\tan y|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)}=\log|\tan x(t)|$$

e

$$\int_1^t\frac{3e^s}{e^s-1}=3\log|e^s-1|\Big|_1^t=3\log|\frac{e^t-1}{e-1}|,$$

abbiamo che $x(t)=\arctan\left[3\log\frac{e^t-1}{e-1}\right]$.

Esercizio 7) [16 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x)=e^{-\frac{x}{3}}(3x-2)^{\frac{1}{9}}$.
Dominio $\mathbb{R}$
Intersezione assi e segno di f $(\frac{2}{3},0)$, $(0-2^{\frac{1}{9}})$, $\{f>0\}=(\frac{2}{3},+\infty)$
Asintoto orizzontale a $+\infty$, no asintoto obliquo a $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

Monotonia di f

$$f'(x)=e^{-\frac{x}{3}}(3x-2)^{-\frac{8}{9}}(1-x)\text{ per }x\neq\frac{2}{3},\quad \{f'>0\}=(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},1)$$

Convessitá di f

$$f''(x)=e^{-\frac{x}{3}}(3x-2)^{-\frac{17}{9}}x(x-2)\text{ per }x\neq\frac{2}{3},\quad \{f''>0\}=(0,\frac{2}{3})\cup(2,+\infty).$$