Analisi Matematica 1 - V Appello - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Provare che $3^{2n} - 8n - 1$ è divisibile per 64 per ogni $n \in \mathbb{N}$..
Ne proviamo la validitá per $n \in \mathbb{N}$ grazie al principio di induzione. Infatti $3^{2n} - 8n - 1 = 0$ per $n = 1$ è divisibile per 64. Se supponiamo la proprietá vera per n, abbiamo che nel caso $n + 1$ possiamo scrivere $3^{2(n+1)} - 8(n + 1) - 1$ come $9(3^{2n} - 8n - 1) + 64n$, che risulta divisibile per 64 come somma di due numeri entrambi divisibili per 64. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che la proprietá vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2) [8 punti] Data la successione

$$a_n = \begin{cases} 2e^{-(n-4)^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^2-2n+2} - 1 & n \text{ dispari,} \end{cases}$$

determinare per $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.
Siccome $0 \geq \frac{1}{n^2-2n+2} - 1 \to -1$ per $n \to +\infty$ in modo decrescente e $2 \geq 2e^{-(n-4)^2} \geq 0$, abbiamo che $\sup A = \max A = a_4 = 2$ e $\inf A = -1$ non è un minimo.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos \dfrac{1}{n})^{[(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) \sin \frac{1}{n}]^{-1}}$.
Poiché tramite razionalizzazione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} - 1}{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) \sin\frac{1}{n}} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos n^{-1}}{n^{-2}} \frac{n^{-1}}{\sin n^{-1}} (\sqrt{1+2n^{-2}} + \sqrt{1+n^{-2}}) = -1$$

dai limiti notevoli di seno e coseno, otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (\cos\frac{1}{n})^{[(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) \sin \frac{1}{n}]^{-1}} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ (1 + (\cos n^{-1} - 1))^{\frac{1}{\cos n^{-1} - 1}} \right\}^{\frac{\cos n^{-1} - 1}{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}) \sin n^{-1}}} = e^{-1}.$$

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} + \cos x - 2(1 + \sin \frac{x}{2})}{3\tan x - \sin(3x)}$.
Dagli sviluppi di Taylor delle funzioni trigonometriche e dell'esponenziale otteniamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} + \cos x - 2(1+\sin\frac{x}{2})}{3\tan x - \sin(3x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\frac{x^3}{6}+O(x^4)} + 1 - \frac{x^2}{2} - 2 - x + \frac{x^3}{24} + O(x^4)}{3x + x^3 - 3x + \frac{9}{2}x^3 + O(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{24} + O(x^4)}{\frac{11}{2}x^3 + O(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{24} + O(x^4)}{\frac{11}{2}x^3 + O(x^4)} = \frac{1}{132}. \end{aligned}$$

Esercizio 5) [12 punti] Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}dx$.
Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$. Dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}dx = \int \frac{t^4+1}{t(t^2+1)}dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$\int \frac{t^4+1}{t(t^2+1)}dt = \int [t + \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2+1}]dt = \frac{t^2}{2} + \log\frac{|t|}{t^2+1} + c.$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}dx = \frac{1}{2}\tan^2\frac{x}{2} + \log\frac{|\tan\frac{x}{2}|}{\tan^2\frac{x}{2}+1} + c.$$

Esercizio 6) [12 punti] Determinare la soluzione di $x' - \frac{t}{t^2-1}x = t$ con $x(0) = 1$.
Siccome

$$\int_0^t \frac{s}{s^2-1}ds = \frac{1}{2}\int_0^t [\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}]ds = \frac{1}{2}\log(1-t^2)$$

per $|t| < 1$, la soluzione cercata è

$$x(t) = \sqrt{1-t^2}[1 + \int_0^t \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}ds] = \sqrt{1-t^2}[1 - \sqrt{1-s^2}\Big|_0^t] = 2\sqrt{1-t^2} + t^2 - 1.$$

Esercizio 7) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(\dfrac{e^x-1}{e^x-2}) + 2x$.
Dominio $(-\infty, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$
Asintoti $x = \log 2$ discontinuitá di salto, $y = 2x + \arctan\frac{1}{2}/2x + \frac{\pi}{4}$ asintoto obliquo a $-\infty/+\infty$

$$\lim_{x\to(\log 2)^\pm} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} + 2\log 2, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x] = \arctan\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \frac{\pi}{4}$$

Monotonia di f

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 13e^x + 10}{2e^{2x} - 6e^x + 5}, \quad \{f' > 0\} = (-\infty, \log\frac{5}{4}) \cup (\log 2, +\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = \frac{e^x(2e^{2x}-5)}{(2e^{2x}-6e^x+5)^2}, \quad \{f'' > 0\} = (\frac{1}{2}\log\frac{5}{2}, +\infty).$$