Analisi Matematica 1 - III parte del I Esonero

Esercizi a risposta aperta

Esercizio 1) [10 punti] Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza $2^n > n^2 + 1$.
Si vede facilmente che la disuguaglianza è falsa per $n = 1, 2, 3, 4$. Ne proviamo adesso la validitá per $n \geq 5$ grazie al principio di induzione. Infatti per $n = 5$ la disuguaglianza si riduce a $2^5 = 32 > 5^2 + 1 = 26$ che è ovviamente vera. Se supponiamo la disuguaglianza $2^n > n^2 + 1$ vera per $n \geq 5$, abbiamo che vale

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 1) \geq (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 2$$

poiché $2(n^2 + 1) \geq n^2 + 2n + 2$ è vera per $n \geq 2$. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che $2^n > n^2 + 1$ vale per ogni $n \geq 5$.

Esercizio 2) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = x(2 + \frac{1}{\log x})$.
Dominio $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f > 0\} = (0, e^{-\frac{1}{2}}) \cup (1, +\infty)$, $(e^{-\frac{1}{2}}, 0)$

Asintoti $x = 1$ asintoto verticale, no asintoto obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = +\infty$$

Monotonia di f

$$f'(x) = \frac{2\log^2 x + \log x - 1}{\log^2 x}, \quad \{f' > 0\} = (0, e^{-1}) \cup (e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = \frac{2 - \log x}{x \log^3 x}, \quad \{f'' < 0\} = (1, e^2)$$

Esercizio 3) [12 punti] Determinare l'estremo inferiore/superiore dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x+1) + \log(x+3) < \log 3 + \log(2x+1)\} \bigcup \{2 + \frac{\cos(n\pi)}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

discutendo se si tratta di massimo/minimo.
L'insieme A è composto da due parti A_1 e A_2. Discutiamo prima di tutto la disuguaglianza

che definisce A_1. Affinché tutti i logaritmi coinvolti abbiano senso, dobbiamo determinare $x > -\frac{1}{2}$ tali che $\log \frac{(x+1)(x+3)}{3(2x+1)} < 0$, o equivalentemente tali che

$$\frac{x(x-2)}{3(2x+1)} = \frac{(x+1)(x+3)}{3(2x+1)} - 1 < 0.$$

Siccome l'ultima disuguaglianza vale per $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2)$, otteniamo che $A_1 = (0, 2)$. Per quanto riguarda A_2, osserviamo che $a_n = 2 + \frac{\cos(n\pi)}{n} = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$. Siccome $2 + \frac{1}{n}$ è una successione decrescente mentre $2 - \frac{1}{n}$ è una successione crescente, è vero che $1 = a_1 \leq a_n \leq a_2 = \frac{5}{2}$. Combinando le informazioni su A_1 e A_2 otteniamo che $\inf A = 0$ e non è un minimo mentre $\sup A = \frac{5}{2}$ ed è un massimo.

Esercizio 4) [12 punti] Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}.$$

Siccome $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, dal limite notevole di Nepero possiamo riscrivere il limite dato come

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left\{ [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1}} \right\}^{\frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos^2 x}}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{1 - \sin^2 x} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = -\frac{1}{2}$$

otteniamo che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$