Analisi Matematica 1 - II Esonero - Soluzioni

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\cot x}$.
Dalla formula di de l'Hopital e dal limite notevole del seno abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\cot x} = - \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

Esercizio 2) [12 punti] Determinare lo sviluppo di Taylor al quart'ordine in $x_0 = 0$ di $f(x) = e^{-x} \log(1 - x)$.
Dagli sviluppi $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$ e $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$ per $x \to 0$, ricaviamo che

$$f(x) = e^{-x} \log(1-x) = -\Big[1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+O(x^4)\Big]\Big[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+O(x^5)\Big] = -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+O(x^5)$$

per $x \to 0$.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 0} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}}$.
Siccome

$$\lim_{x \to 0^-} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}} = \lim_{y \to 0^+} (-\tan y)^{\frac{1}{\log |y|}} = \lim_{y \to 0^+} (\tan y)^{\frac{1}{\log |y|}}$$

tramite il cambio di variabile $y = -x$, abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^-} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}} = \lim_{x \to 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}}$$

e basta considerare il calcolo del solo limite destro. Dalla formula di de l'Hopital e dal limite notevole del seno otteniamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\tan x)}{\log |x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\cos^2 x \tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Scrivendo $\tan x = e^{\log(\tan x)}$ otteniamo che

$$\lim_{x \to 0^+} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}} = e$$

e quindi

$$\lim_{x \to 0} (\tan x)^{\frac{1}{\log |x|}} = e.$$

Esercizio 4) [16 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \Big[(2x + \sqrt{1 + 2x^2})^{\frac{1}{\tan x}} - e^2 \Big]$.
Dagli sviluppi di Taylor noti abbiamo che $2x + \sqrt{1 + 2x^2} = 1 + 2x + x^2 + O(x^4)$, $\tan x = x + O(x^3)$ e quindi

$$\frac{\log(2x + \sqrt{1 + 2x^2})}{\tan x} = \frac{2x - x^2 + O(x^3)}{x + O(x^3)} = (2 - x + O(x^2))[1 + O(x^2)] = 2 - x + O(x^2)$$

per $x \to 0$. Scrivendo $2x + \sqrt{1+2x^2} = e^{\log(2x+\sqrt{1+2x^2})}$ dal limite notevole dell'esponenziale otteniamo infine che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\Big[(2x + \sqrt{1+2x^2})^{\frac{1}{\tan x}} - e^2\Big] = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2-x+O(x^2)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x+O(x^2)} - 1}{x} = -e^2.$$

Esercizio 5) [16 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$.

Poniamo $t = \tan\frac{x}{2}$. Dalle formule $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$ e $dx = \frac{2dt}{t^2+1}$ e dal teorema di cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \int \frac{t^2+1}{t(t^2-4t+3)}dt\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Dal metodo dei fratti semplici abbiamo che

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2+1}{t(t^2-4t+3)}dt &= \int \frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)}dt = \frac{1}{3}\int [\frac{1}{t} - \frac{3}{t-1} + \frac{5}{t-3}]dt \\ &= \frac{1}{3}\log|\frac{t(t-3)^5}{(t-1)^3}| + c\end{aligned}$$

e quindi otteniamo che

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \frac{1}{3}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}(\tan\frac{x}{2}-3)^5}{(\tan\frac{x}{2}-1)^3}\right| + c.$$

Esercizio 6) [16 punti] Per $\alpha > 0$ determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha}}$ e calcolare $\displaystyle\int_{\alpha^2+\alpha+1}^{\alpha^2+3\alpha+4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha}}$.

Poniamo $x^2+\alpha = (x+t)^2$, ossia scegliamo $t = \sqrt{x^2+\alpha} - x$ o $x = \frac{\alpha - t^2}{2t}$. Siccome $dx = -\frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt$ dal cambio di variabile otteniamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{2}{t^2-\alpha}dt\Big|_{t=\sqrt{x^2+\alpha}-x}$$

e dal metodo dei fratti semplici ricaviamo che

$$\int \frac{2}{t^2-\alpha}dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int [\frac{1}{t-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{t+\sqrt{\alpha}}]dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log|\frac{t-\sqrt{\alpha}}{t+\sqrt{\alpha}}| + c.$$

Nella variabile di partenza abbiamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\log|\frac{\sqrt{x^2+\alpha}-x-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2+\alpha}-x+\sqrt{\alpha}}| + c$$

e quindi otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\alpha^2+\alpha+1}^{\alpha^2+3\alpha+4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+\alpha}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log|\frac{\sqrt{(\alpha^2+3\alpha+4)^2+\alpha}-\alpha^2-3\alpha-4-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha^2+3\alpha+4)^2+\alpha}-\alpha^2-3\alpha-4+\sqrt{\alpha}}| \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log|\frac{\sqrt{(\alpha^2+\alpha+1)^2+\alpha}-\alpha^2-\alpha-1-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha^2+\alpha+1)^2+\alpha}-\alpha^2-\alpha-1+\sqrt{\alpha}}|.\end{aligned}$$

Esercizio 7) [20 punti] Data l'equazione $x''+x=\cot^2 t$ determinare le soluzioni dell'equazione omogenea associata ed una soluzione particolare. Calcolare inoltre l'unica soluzione x con dati iniziali $x(\frac{\pi}{2})=x'(\frac{\pi}{2})=0$.
Risolvendo il polinomio caratteristico $P(\lambda)=\lambda^2+1=0$, otteniamo $\lambda=\pm i$ e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma $c_1\cos t+c_2\sin t$. Dal metodo di variazione delle costanti cerchiamo la soluzione particolare della forma $c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t$, ove $c_1(t)$ e $c_2(t)$ risolvono il sistema

$$c_1'\cos t+c_2'\sin t=0,\ -c_1'\sin t+c_2'\cos t=\cot^2 t.$$

Siccome

$$c_1'=-\sin t\cot^2 t=-\frac{\cos^2 t}{\sin t},\ c_2'=\cos t\cot^2 t=\frac{\cos^3 t}{\sin^2 t},$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}c_1(t) &= -\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t-1}\sin t dt=-\int \frac{s^2}{s^2-1}ds\Big|_{s=\cos t} \\ &= -\cos t-\frac{1}{2}\int[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}]ds\Big|_{s=\cos t}=-\cos t-\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\end{aligned}$$

e

$$c_2(t) = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\frac{1-s^2}{s^2}ds\Big|_{s=\sin t}=-\frac{1}{\sin t}-\sin t.$$

La soluzione particolare cercata è

$$\bar{x}(t)=-\frac{1}{2}\cos t\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}-2$$

e la soluzione generale ha la forma $c_1\cos t+c_2\sin t+\bar{x}(t)$. Imponendo le condizioni iniziali $x(\frac{\pi}{2})=x'(\frac{\pi}{2})=0$ otteniamo $c_1=0$ e $c_2=2$ e quindi la soluzione richiesta è

$$x(t)=2\sin t-\frac{1}{2}\cos t\log\frac{1-\cos t}{1+\cos t}-2.$$