AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 4 di Mercoledì 18 ottobre 2023

Argomenti: limiti di successioni

Esercizio 1.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! \sqrt[n]{n^n+1}}{(n+1)!-e^n}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!-e^n}{n! \sqrt[n]{n^n+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-\frac{e^n}{n!}}{\sqrt[n]{n^n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-\frac{e^n}{n!}}{n\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{e^n}{n\cdot n!}}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)}+n^{\cos(n^3)}}.$$

Soluzione: Poiché $0 \le \arctan\left(n^2\right) \le \frac{\pi}{2}, \left|\cos\left(n^3\right)\right| \le 1$, allora

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)}+n^{\cos(n^3)}} &\le \sqrt[n]{n^{\frac{\pi}{2}}+n} \le \sqrt[n]{2n^{\frac{\pi}{2}}}, \\
\sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)}+n^{\cos(n^3)}} &\ge \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} \ge \sqrt[n]{\frac{2}{n}},
\end{aligned}$$

ed essendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^{\frac{\pi}{2}}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\arctan(n^2)}+n^{\cos(n^3)}} = 1.$$

Esercizio 3.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{(\ln n)^{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\ln\left(\sqrt{n}\right)}}{e^{\ln((\ln n)^{\ln n})}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{2}\ln n-\ln n(\ln\ln n)}=e^{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}-\ln\ln n)(\ln n)}=e^{-\infty}=0.$$

Esercizio 4.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{n^2+3}\right)^{n^2}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n}{n^2+3}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2n+3}{n^2+3}\right)^{n^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2n+3}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{2n+3}}\right)^{-\frac{n^2(2n+3)}{n^2+1}}\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2n+3}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{2n+3}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2(2n+3)}{n^2+1}}\\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2(2n+3)}{n^2+1}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e^n\ln\left(1+e^n\right)-ne^n\right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(e^n\ln\left(1+e^n\right)-ne^n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(e^n\ln\left(e^n\left(1+e^{-n}\right)\right)-ne^n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(e^n\left(n+\ln\left(1+e^{-n}\right)\right)-ne^n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}e^n\ln\left(1+e^{-n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-n}\right)}{e^{-n}}.\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pi^n-\pi^{n-\frac{1}{\pi^n}}\right).$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\pi^n-\pi^{n-\frac{1}{\pi^n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\pi^{-\frac{1}{\pi^n}}}{\frac{1}{\pi^n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{\ln\pi}{\pi^n}}}{\frac{1}{\pi^n}}\\
&= \ln\pi\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{\ln\pi}{\pi^n}}-1}{-\frac{\ln\pi}{\pi^n}}\\
&= \ln\pi.
\end{aligned}$$

Esercizio 7 (Assegnato per casa).
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(3^n)}{n\ln n-\ln n!}.$$

Soluzione: Poiché $\sin(3^n)$ è limitata e $n\ln n-\ln n! = \ln\frac{n^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\to}+\infty$, allora dal teorema dei Carabinieri concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(3^n)}{n\ln n-\ln n!}=0.$$

Esercizio 8 (Assegnato per casa).
Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n-1)}{\ln n}\right)^{\ln\left(n^3+n^2\right)}.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(2n-1)}{\ln n}\right)^{\ln\left(n^3+n^2\right)} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n+\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\ln\left(n^3\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}}\right)^{\frac{3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{\ln n}{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}}}\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\frac{\ln n}{\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}}\right)^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\ln n}}\\
&= e^{3\ln 2}\\
&= 8.
\end{aligned}$$