AM110 - Analisi matematica 1

Luca Battaglia

Esercitazione 8 di Venerdì 3 novembre 2023

Argomenti: studio di funzioni

Esercizio 1.
Studiare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{e^{6x}}{e^{3x} - 2}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è definita quando il denominatore non si annulla, dunque il dominio è
$$\left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right) \cup \left(\frac{\log 2}{3}, +\infty\right).$$

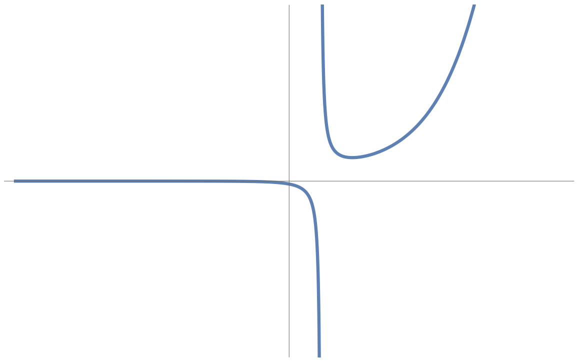
Intersezione assi e segno: Poiché il numeratore è sempre positivo, studiando il segno del denominatore otteniamo che
$$f(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{\log 2}{3}, +\infty\right)$$
$$f(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right);$$

calcolando il valore di $f(0)$ otteniamo poi che l'intersezione con gli assi è data dal punto
$$(0, -1).$$

Asintoti: Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\frac{\log 2}{3}^\pm} f(x) = \pm\infty$, gli asintoti sono
$$y = 0 \text{ (orizzontale)}, \qquad x = \frac{\log 2}{3} \text{ (verticale)}.$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \dfrac{3e^{6x}(e^{3x} - 4)}{(e^{3x} - 2)^3}$ otteniamo che
$$f(x) \quad \text{è crescente se} \quad x \in \left(\frac{\log 4}{3}, +\infty\right)$$
$$f(x) \quad \text{è decrescente se} \quad x \in \left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right) \cup \left(\frac{\log 2}{3}, \frac{\log 4}{3}\right)$$
$$f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad x = \frac{\log 4}{3}.$$

Convessità: Dallo studio del segno di $f''(x) = \dfrac{9e^{6x}\left(e^{6x} - 6e^{3x} + 16\right)}{(e^{3x} - 2)^3}$ otteniamo che
$$f(x) \quad \text{è concava se} \quad x \in \left(-\infty, \frac{\log 2}{3}\right)$$



$$f(x) \quad \text{è convessa se} \quad x \in \left(\frac{\log 2}{3}, +\infty\right)$$
$$f(x) \quad \text{NON ha flessi.}$$

Grafico:

Esercizio 2.
Studiare il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2} - \sin(2x)}.$$

Soluzione: Dominio: Poiché il denominatore non si annulla mai, la funzione è definita per ogni valore reale, ovvero il dominio è
$$(-\infty, +\infty).$$

Intersezione assi e segno: Poiché il denominatore è sempre positivo, il segno sarà lo stesso del numeratore, e cioè, restringendoci per periodicità all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\pi}{4}$$
$$f(x) < 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right);$$

essendo $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, le intersezioni con gli assi saranno

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \qquad \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \qquad \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Asintoti: Poiché, per periodicità, non esiste il limite $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, allora

$$f \text{ NON ha asintoti.}$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \frac{2\left(1 - \sqrt{2}\sin(2x)\right)}{\left(\sqrt{2} - \sin(2x)\right)^2}$ otteniamo che

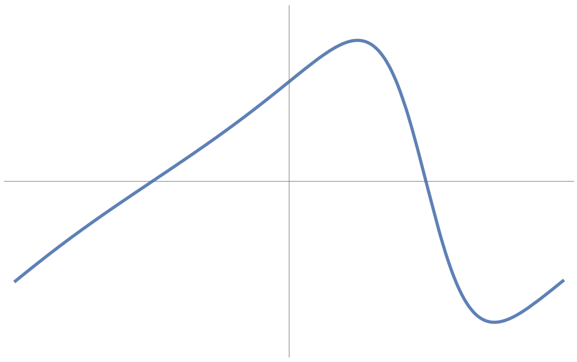
$$f(x) \quad \text{è crescente se} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(x) \quad \text{è decrescente se} \quad x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi\right)$$
$$f(x) \quad \text{ha un massimo in} \quad x = \frac{\pi}{8}$$

$$f(x) \quad \text{ha un minimo in} \quad x = \frac{3}{8}\pi.$$

Convessità: Dallo studio del segno di $f''(x) = \dfrac{-4\sqrt{2}\sin(2x)\cos(2x)}{\left(\sqrt{2}-\sin(2x)\right)^3}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lll} f(x) & \text{è convessa se} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ f(x) & \text{è concava se} & x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ f(x) & \text{ha un flesso in} & x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

Grafico:



Esercizio 3 (Assegnato per casa)**.**
Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left((x+1)^3\right) + \frac{\pi}{4}.$$

Soluzione: Dominio: La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque il suo dominio è

$$(-\infty, +\infty).$$

Intersezione assi e segno: Dalla monotonia dell'arcotangente e della potenza cubica otteniamo che

$$\begin{array}{lll} f(x) > 0 & \iff & x \in (-2, +\infty) \\ f(x) = 0 & \iff & x = -2 \\ f(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, -2); \end{array}$$

calcolando poi $f(0)$ otteniamo che le intersezioni con gli assi sono:

$$(-2, 0), \qquad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Asintoti: Poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{4}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{4}\pi$, allora gli asintoti saranno

$$y = -\frac{\pi}{4} \text{ (orizzontale)}, \qquad y = \frac{3}{4}\pi \text{ (orizzontale)}.$$

Monotonia: Dallo studio del segno di $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{(x+1)^6+1}$ otteniamo che

$$f(x) \quad \text{è crescente se} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) \quad \text{NON ha massimi né minimi.}$$

Convessità: Dallo studio del segno di $f''(x) = \dfrac{6(x+1)\left(1-2(x+1)^6\right)}{\left((x+1)^6+1\right)^2}$ otteniamo che

$$\begin{array}{lcl}
f(x) & \text{è convessa se} & x \in \left(-\infty, -1-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\right) \cup \left(0, -1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\right) \\
f(x) & \text{è concava se} & x \in \left(-1-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}, 0\right) \cup \left(\dfrac{-}{1}+1\sqrt[6]{2}, +\infty\right) \\
f(x) & \text{ha un flesso in} & x = -1 \pm \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}, -1.
\end{array}$$

Grafico: