Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Tutorato 1

Esercizio 1. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti identità.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

(v) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$

(vi) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Esercizio 2. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti disuguaglianze.

(i) $n^3 > 2n - 2$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $2^n > n^3$ per ogni $n \geq 10$

Esercizio 3. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni.

(i) $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$

(ii) $2^{2n+1} + 5^{2n+1}$ è divisibile per 7 per ogni $n \geq 0$

(iii) $n^2 - 1$ è divisibile per 8 per ogni $n \geq 1$ dispari

(iv) $2^n + 1$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$ dispari

(v) Un poligono convesso con n lati possiede $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonali per ogni $n \geq 3$

(vi) La somma degli angoli interni di un poligono convesso con n lati è $(n-2)\pi$ per ogni $n \geq 3$ (si assuma che il risultato sia vero per i triangoli)

(vii) Date un insieme X, l'insieme delle parti di X è definito come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X e si denota come $\mathcal{P}(X)$. Dato un insieme X di cardinalità finita n, la cardinalità di $\mathcal{P}(X)$ è 2^n.

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti in maniera ricorsiva nel seguente modo: definiamo $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e in generale $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$. I primi 10 numeri di Fibonacci sono $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni riguardo i numeri di Fibonacci.

(i) $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$ per ogni $n \geq 1$

(ii) $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$

(iii) $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$ per ogni $n \geq 1$

(iv) $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ per ogni $n \geq 1$

(v) $f_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ per ogni $n \geq 0$

Esercizio 5. Numeri di Catalan

(i) Utilizzare il principio di induzione per verificare la seguente identità:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ per ogni } n \geq 2$$

(ii) Definita la successione di Catalan $C_n := \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ per ogni $n \geq 2$ e preso $C_1 = 1$, utilizzare il principio di induzione per verificare la seguente relazione di ricorsione:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \text{ per ogni } n \geq 2$$