Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 1

Esercizio 1. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti identità.

(i) Supponiamo $n = 1$: allora $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$; d'altro canto $\frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = 1$. Ora $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \sum_{k=1}^{n-1} k^3$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2(n-1+1)^2}{4} = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$, quindi $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^3 + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{4n^3 + (n^2 - 2n + 1)n^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(ii) Supponiamo $n = 0$: allora $\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; d'altro canto $(0+1)^2 = 1$. Ora $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (2n+1) + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = (n-1+1)^2 = n^2$, quindi $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2n + 1 + n^2 = (n+1)^2$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 0$.

(iii) Supponiamo $n = 1$: allora $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4\cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3}$; d'altro canto $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. Vogliamo verificare che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$. Ora $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, quindi $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4\left(n^2+2n+\frac{3}{4}\right)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+1\right)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(vi) Supponiamo $n = 1$: allora $\prod_{k=1}^{1}(2k-1) = (2\cdot 1 - 1) = 1$; d'altro canto $\frac{(2\cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!} = \frac{2}{2} = 1$. Ora $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$, quindi $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n-1)\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$, e moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per $2n$ otteniamo $\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{(2n)(2n-1)!}{2^{n-1}\cdot 2n(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 2. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti disuguaglianze.

(i) Supponiamo $n = 1$: allora $1^3 = 1$; d'altro canto $2\cdot 1 - 2 = 0$ e ovviamente $1 > 0$. Vogliamo verificare che $(n+1)^3 > 2(n+1) - 2 = 2n$. Ora $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $n^3 > 2n-2$, quindi $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 > 2n-2+3n^2+3n+1 = 5n-1+3n^2 > 5n-1$, oltretutto la disequazione $5n-1 > 2n$ è verificata per ogni numero intero maggiore di 0, q in conclusione $(n+1)^3 > 5n-1 > 2n$. Grazie al principio di induzione concludiamo che la disequazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(ii) Supponiamo $n = 10$: allora $2^{10} = 1024$; d'altro canto $10^3 = 1000$, e ovviamente $1024 > 1000$. Vogliamo verificare che $2^{n+1} > (n+1)^3$. Ora $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $2^n > n^3$, quindi $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$. Osserivamo che la disequazione $2n^3 > (n+1)^3$, applicando la radice cubica, diventa $2^{\frac{1}{3}} n > n+1$ e isolando la n otteniamo $n > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}} - 1}$; notiamo anche che $10 > \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}} - 1}$. Questo significa che preso $n \geq 10$ la disequazione $2n^3 > (n+1)^3$ è verificata, ma da quanto ipotizzato abbiamo anche $2^{n+1} > 2n^3$, e per transitività finalmente possiamo scrivere $2^{n+1} > (n+1)^3$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 10$.

Esercizio 3. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni.

(i) Supponiamo $n = 0$: allora $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$, e chiaramente 0 è divisibile per 3. Vogliamo dimostrare che $(n+1)^3 + 2(n+1)$ è divisibile per 3. Ora $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = (n^3 + 2n) + 3n + 3 = (n^3 + 2n) + 3(n+1)$; per ipotesi induttiva possiamo supporre che $n^3 + 2n$ sia divisibile per 3, quindi il numero $(n+1)^3 + 2(n+1)$ è visibile per 3 essendo somma di due numeri entrambi divisibili per 3. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$.

(ii) Supponiamo $n = 0$: allora $2^{2 \cdot 0 + 1} + 5^{2 \cdot 0 + 1} = 2 + 5 = 7$, e chiaramente 7 è divisibile per se stesso. Vogliamo dimostare che $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1}$ è divisibile per 7. Ora $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1} = 2^2 \cdot 2^{2n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n+1} = 4 \cdot 2^{2n+1} + 4 \cdot 5^{2n+1} + 21 \cdot 5^{2n+1} = 4(2^{2n+1} + 5^{2n+1}) + 21 \cdot 5^{2n+1}$; per ipotesi induttiva possiamo supporre che $2^{2n+1} + 5^{2n+1}$ sia divisibile per 7; oltretutto 21 è divisibile per 7, quindi $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1} = 4(2^{2n+1} + 5^{2n+1}) + 21 \cdot 5^{2n+1}$ è divisibile per 7. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$.

(iii) Suppongo $n = 1$ e banalmente $1^1 - 1 = 0$ è divisibile per 8. Ora per ipotesi induttiva so che fino ad n con n dispari è verificata l'affermazione. Verifico che vale anche per $n+2$, ovvero il numero dispari successivo: infatti $(n+2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 4 - 1 = (n^2 - 1) + 4n + 4$. Per ipotesi induttiva $n^2 - 1$ è divisibile per 8. Ma anche $4n + 4$ lo è, infatti n è dispari quindi esiste un k tale per cui $n = 2k + 1$. Allora $4n + 4 = 8k + 4 + 4 = 8k + 8 = 8(k+1)$ che è divisibile per 8. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^2 - 1$ è divisibile per 8 per ogni $n \geq 1$ dispari.

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti in maniera ricorsiva nel seguente modo: definiamo $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e in generale $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$. I primi 10 numeri di Fibonacci sono $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni riguardo i numeri di fibonacci.

(i) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$. Supponiamo $n = 1$: allora l'equazione diventa $f_1 = f_3 - 1$, che è verificata dal momento in cui $f_1 = 1$ e $f_3 = 2$. Vogliamo mostrare che $f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$, quindi $f_1 + f_2 + ... + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = (f_{n+1} + f_{n+2}) - 1 = f_{n+3} - 1$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(ii) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$. Supponiamo $n = 1$: allora l'equazione diventa $f_1^2 = f_1 f_2$, che è verificata dal momento in cui $f_1 = f_2 = 1$. Vogliamo mostrare che $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+1} f_{n+2}$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$, quindi $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(iii) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2n}$. Supponiamo $n = 1$: allora l'equazione diventa $f_1 = f_2$, che è verificata dal momento in cui $f_1 = f_2 = 1$. Vogliamo mostrare che $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} + f_{2(n+1)-1} = f_{2(n+1)}$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$, quindi $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} + f_{2(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2(n+1)}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(iv) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1$. Supponiamo $n = 1$: allora l'equazione diventa $f_2 = f_3 - 1$, che è verificata dal momento in cui $f_2 = 1$ e $f_3 = 2$. Vogliamo mostrare che $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2(n+1)+1} - 1$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$, quindi $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2n+1} - 1 + f_{2(n+1)} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 = f_{2n+3} - 1 = f_{2(n+1)+1} - 1$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(v) Supponiamo $n = 0$: per definizione $f_0 = 0$, d'altro canto $\frac{(1+\sqrt{5})^0 + (1-\sqrt{5})^0}{2^0\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$. Vogliamo mostare che $f_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} + (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$. Adesso $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_{n-1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1} + (1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}$ e $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$, quindi

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}} = \\
&\frac{2(1+\sqrt{5})^{n-1}+2(1-\sqrt{5})^{n-1}+(1+\sqrt{5})^{n}+(1-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}} = \\
&\frac{2(1+\sqrt{5})^{n-1}+2(1-\sqrt{5})^{n-1}+(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n}\sqrt{5}} = \\
&\frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^{n-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\sqrt{5})^{n-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} = \\
&\frac{\big(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)(1+\sqrt{5})^{n-1}+\big(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Ora notiamo che $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sono le soluzioni dell'equazione $x+1=x^2$, questo vuol dire che $\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Concludiamo che

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \frac{\big(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)(1+\sqrt{5})^{n-1}+\big(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} = \\
&\frac{\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^2(1+\sqrt{5})^{n-1}+\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} = \\
&\frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^{n-1}+(1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^2\cdot 2^{n-1}\sqrt{5}} = \\
&\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}+(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 5. Parte 1) Dimostro per induzione la seguente identità:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ per ogni } n \geq 2$$

Passo base: verifico che vale per $n=2$:

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{2+k}{k} = \frac{2+2}{2} = 2 = \frac{4!}{3!2!}$$

Passo induttivo: Assumo che l'identità valga per n, e mostro che vale anche per $n+1$.
Osservo che:

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(n+k)}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(n+k)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \text{ per ipotesi induttiva.}$$

$$\text{Allora: } \prod_{k=2}^{n}(n+k) = \frac{n!(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!}$$

Quindi adesso verifico usando l'ipotesi induttiva che:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{n+1+k}{k} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

Infatti: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} \frac{n+1+k}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1}(n+1+k)}{\prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=2}^{n+1}(n+1+k) \overset{j=k+1}{=} \frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=3}^{n+2}(n+j) =$

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+2)}\prod_{j=2}^{n+2}(n+j) = \frac{(2n+1)}{(n+1)!}\frac{(2n+2)}{(n+2)}\prod_{j=2}^{n}(n+j)$$

Ora posso usare finalmente l'ipotesi induttiva sul prodotto che come visto nell'osservazione precedente equivale a: $\displaystyle\prod_{j=2}^{n}(n+j) = \frac{(2n)!}{(n+1)!}$

Quindi:

$$\frac{(2n+1)}{(n+1)!}\frac{(2n+2)}{(n+2)}\prod_{j=2}^{n}(n+j) = \frac{(2n+1)}{(n+1)!}\frac{(2n+2)}{(n+2)}\frac{(2n)!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

e la prima parte dell'esercizio è finita.

Parte 2) Mostro per induzione che:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1} \text{ per ogni } n \geq 2$$

Passo base: vera per $n = 2$: infatti $C_2 = 2 = \dfrac{8-2}{3}C_1 = \dfrac{6}{3}$. Ora per ipotesi induttiva asserisco che è vera per n e dimostro che vale per $n+1$, infatti:

$$C_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+2)(n+1)!(n+1)n!} =$$
$$\frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{2(2n+1)}{n+2}C_n = \frac{4(n+1)-2}{n+1}C_n$$