Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Tutorato 2

Esercizio 1. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente/inferiormente, in caso affermativo calcolare l'esteremo superiore/inferiore, e stabilire se si tratta di un massimo/minimo.

(i) $\left\{\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}$

(ii) $\left\{\frac{2n}{n^2+1} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

(iii) $\left\{(-1)^n \frac{2n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}$

(iv) $\left\{n^2 e^{-n} \,:\, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}$

(v) $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x^2+2} \leq x+3\right\}$

(vi) $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x^2-5x+6}{x^3-1} > 0\right\}$

(vii) $\left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-5x^2+3| \leq 2x\right\}$

Esercizio 2. Dato l'insieme $A = \left\{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} \,:\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$, dimostrare che $\sup A = 1$, $\inf A = -1$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Esercizio 3. Dato l'insieme $B = \left\{ \dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \ : \ x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \right\}$, dimostrare che $\sup B = 1$, $\inf B = 0$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}}{n}$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5}$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\big(e^{\frac{2}{n}}-1\big)$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^5+1}$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \big[n\log(n-1)-(n-e^{-n})\log n\big]$

(vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sinh n}{\sin n}$

(vii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}-\cos n}{n^2}$

(viii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$

(ix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2\log n}$

(x) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log n}}$

(xi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\log\left(1+\frac{3}{n^5}\right)}$

(xii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-5n}}{\log\left(1+\sqrt{3}e^{-5n}\right)}$

(xiii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{5}{n}}\sqrt[n]{2^n+5^n}$

(xiv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-7)^n+n^{n-2}}{4n^n-5n!}$

(xv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2^n)^{\frac{1}{n}}}{(n+e^{-n})\log n}$

(xvi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\big(\sqrt[n]{7^n+5^n}-7\big)$

(xvii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5 + 10n^3 - 2n + 1}{12n^4 - 8n^5 - 2n^2 + n - 9}$

(xviii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n + n^{\frac{2}{3}} + 7n^{\frac{5}{4}} - 3\sqrt{n} + 9n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{8}{7}} + 2n^{\frac{3}{2}} - 3n^{\frac{1}{5}} + 5n^{\frac{9}{8}} - 100n}$

(xix) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{1 - n}$

(xx) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{1 - \cos(n^{-2})}$

(xxi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(ne^{-2n}\right) + n\sqrt{10 - 10\cos(e^{-2n})}}{\sin\left((2n+1)e^{-2n}\right)}$

(xxii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n - n\arctan\left(3e^n\right)\right)\sin\left(n^{-1}\right)$

(xxiii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2}{3}n}\left(1 - \cos\left(2\cosh n - e^n\right)\right)^{\frac{1}{3}}$

dove il seno e il coseno iperbolici sono definiti nel seguente modo:

$$\sinh n := \frac{e^n - e^{-n}}{2} \text{ e } \cosh n := \frac{e^n + e^{-n}}{2}$$

Esercizio 5. Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$, dove f_n è l'n-esimo numero di Fibonacci e $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la sezione aurea.

Esercizio 6. Dimostrare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4$, dove C_n è l'n-esimo numero di Catalan.