Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 2

Esercizio 1. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente/inferiormente, in caso affermativo calcolare l'esteremo superiore/inferiore, e stabilire se si tratta di un massimo/minimo.

(i) Procediamo per passi.

1) $\dfrac{n-1}{n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, e $\dfrac{n-1}{n} = 0$ quando è $n = 1$, quindi 0 è il minimo.
2) $\dfrac{n-1}{n} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non il massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\dfrac{n-1}{n} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

(ii) Procediamo per passi.

1) $\dfrac{2n}{n^2+1} \geq -1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\dfrac{2n}{n^2+1} = -1$ quando è $n = -1$, quindi -1 è il minimo.
2) $\dfrac{2n}{n^2+1} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\dfrac{2n}{n^2+1} = 1$ quando è $n = 1$, quindi 1 è il massimo.

(v) Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2+2} \leq x+3$ sono $x \in \left[-\dfrac{7}{6}; \infty\right)$, quindi il minimo dell'insieme è $-\dfrac{7}{6}$ e l'insieme è illimitato superiormente.

(vi) Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1} > 0$ sono $x \in (-\infty;3) \cup (-1;2)$, quindi l'insieme è illimitato inferiormente e 2 è il sup ma non il massimo dell'insieme.

(vii) Le soluzioni della disequazione $|x - 5x^2 + 3| \leq 2x$ sono $x \in \left[\dfrac{\sqrt{61}-1}{10}; \dfrac{\sqrt{69}+3}{10}\right]$, quindi il minimo dell'insieme è $\dfrac{\sqrt{61}-1}{10}$ e il massimo dell'insieme è $\dfrac{\sqrt{69}+3}{10}$.

Esercizio 2. Dato l'insieme $A = \left\{(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$, dimostrare che $\sup A = 1$, $\inf A = -1$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi:

1) $(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ con n pari (se n è dispari la disequazione non è soddisfatta).

2) $(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1} > -1$ per ogni $n \geq 1$, quindi -1 è un minorante ma non un minimo. Dimostriamo che -1 è l'inf: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \dfrac{n^2-1}{n^2+1} \leq -1 + \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ con n dispari (se n è pari la disequazione non è soddisfatta).

Esercizio 3. Dato l'insieme $B = \left\{\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \ : \ x \in \mathbb{R}_{\geq 1}\right\}$, dimostrare che $\sup B = 1$, $\inf B = 0$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi.

1) $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \geq 0$ per ogni $x \geq 1$, oltretutto $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} = 0$ per $x = 1$, quindi 0 è il minimo.

2) $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} < 1$ per ogni $x \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\dfrac{\log x}{\sqrt{1+\log^2 x}} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $x \geq \dfrac{1+\sqrt{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}}{2\varepsilon-\varepsilon^2}$ (notare che se scegliamo ε piccolo allora risulta $2\varepsilon > \varepsilon^2$).

Esercizio 4.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n+1}{n\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\big)} = \frac{2}{\infty} = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^6+6n^5+...)-(n^6-6n^5+...)}{(n^5+...)+(n^5-...)} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^5+...}{2n^5+...} =$
$\frac{12}{2} = 6$ (con i puntini stiamo indicando polinomi in n di grado strettamente minore di 5)

(iii) $\lim_{n\to\infty} n\big(e^{\frac{2}{n}}-1\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}} = 2\cdot 1 = 2$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^5+1} = \lim_{n\to\infty} e^{\log\left(\sqrt[n]{2n^5+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)}$, ora notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(2n^5+1) = 0$ poiché il logaritmo di un polinomio $p(x)$ cresce più lentamente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, quindi $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)} = e^0 = 1$

(v) $\lim_{n\to\infty} \big[n\log(n-1)-(n-e^{-n})\log n\big] = \lim_{n\to\infty} \big[n\log(n-1) - n\log n + e^{-n}\log n)\big] = \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{n-1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} e^{-n}\log n = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^n + 0 = \lim_{n\to\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \log(e^{-1}) = -1$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}-\cos n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2}$, ora notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} = \infty$ poiché l'esponenziale di un polinomio $p(x)$ cresce più velocemente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, oltretutto notiamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$ poiché $\cos n$ è una quantità che oscilla tra -1 e 1 (e quindi è limitata) mentre $n^2 \to \infty$ per $n\to\infty$, quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2} = \infty - 0 = \infty$

(viii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n \overset{m=n+2}{=} \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-2} =$
$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right)^{-2} = e\cdot 1 = e$

(ix) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2\log n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{n^2}\right)^{n^2\log n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}n^2\log n} =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3\frac{\log n}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^{\frac{\log n}{2n}} = e^0 = 1$$

(xi) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\log(1+\frac{3}{n^5})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\log(1+\frac{3}{n^5})}\cdot\frac{\frac{3}{n^5}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^5}} =$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1+\frac{3}{n^5})}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1+\frac{3}{n^5})}\cdot\frac{n^3}{3} =$
$1\cdot 1\cdot\infty = \infty$

(xiv) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-7)^n+n^{n-2}}{4n^n-5n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(1-\frac{7}{n})^n+\frac{n^n}{n^2}}{n^n(4-5\frac{n!}{n^n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{7}{n})^n+\frac{1}{n^2}}{4-5\frac{n!}{n^n}} =$
$\frac{e^{-\frac{1}{7}}+0}{4-0} = \frac{e^{-\frac{1}{7}}}{4}$

(xvi) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(\sqrt[n]{7^n+5^n}-7\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(7\sqrt[n]{1+\left(\frac{5}{7}\right)^n}-7\right) =$
$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(\sqrt[n]{1+\left(\frac{5}{7}\right)^n}-1\right) = 7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(e^{\log\sqrt[n]{1+(\frac{5}{7})^n}}-1\right) =$
$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1\right) =$
$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n\left(e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1\right)\cdot\frac{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)} =$
$7\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1}{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}\cdot\frac{\log(1+(\frac{5}{7})^n)}{(\frac{5}{7})^n}\cdot\frac{n}{n} = 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 7$

(xix) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n}\cdot\frac{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}} =$
$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2-n^2-1}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-3}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$
$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n-1)(n+1)}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}} =$
$3\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 3\cdot\frac{1+0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{1+0}} =$
$\frac{3}{3} = 1$

(xxi) $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(ne^{-2n})+n\sqrt{10-10\cos(e^{-2n})}}{\sin((2n+1)e^{-2n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{(ne^{-2n})\frac{\tan(ne^{-2n})}{(ne^{-2n})}+n\sqrt{10}\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{((2n+1)e^{-2n})\frac{\sin((2n+1)e^{-2n})}{((2n+1)e^{-2n})}} =$
$\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-2n}+n\sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}\frac{\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}}}{(2n+1)e^{-2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-2n}[1+\sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}]}{ne^{-2n}(2+\frac{1}{n})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2+0} =$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

(xxii) $\lim_{n\to\infty} (n - n\arctan(3e^n))\sin(n^{-1}) = \lim_{n\to\infty} n(1-\arctan(3e^n))(n^{-1})\frac{\sin(n^{-1})}{(n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} (1-\arctan(3e^n))\frac{\sin(n^{-1})}{(n^{-1})} = \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{\pi-2}{2}$