Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 3

Esercizio 1.

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(e^{-1}\right)^2 = e^{-2}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} n^2(2e^{\frac{\ln n}{n}}-2) = \lim_{n\to\infty} 2n^2(e^{\frac{\ln n}{n}}-1) = \lim_{n\to\infty} 2n^2\cdot\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\frac{\ln n}{n}}\cdot\frac{\ln n}{n} = 2\lim_{n\to\infty} n\cdot 1\cdot \ln n = 2\lim_{n\to\infty} n\ln n = \infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{n^5}\right)}{2\log\left(n^6+n^2\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^{-5})}{2\log[n^6(1+n^{-4})]} = \lim_{n\to\infty}\frac{-5\log n}{2\log(n^6)+2\log(1+n^{-4})} = -\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{6\log n+\log(1+n^{-4})} = -\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n\left(6+\frac{\log(1+n^{-4})}{\log n}\right)} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot(6+\frac{0}{\infty})} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6} = -\frac{5}{12}$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{+\infty+\infty} = 0$

(v) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}-\frac{\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}(-\sin\left(\frac{1}{n}\right))}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=1$$

Esercizio 2.

(i) $$\lim_{x\to-2}\frac{e^{2x+4}-1}{x+2}\overset{y=x+2}{=}\lim_{y\to0}\frac{e^{2y}-1}{y}=2\lim_{y\to0}\frac{e^{2y}-1}{2y}=2\cdot1=2$$

(iii) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{1-e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{9x^2}9x^2\frac{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}{1-e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}}\frac{2}{\ln(1-x^2)}=$$
$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot9x^2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{\ln(1-x^2)}=-9\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{\ln(1-x^2)}=-9\cdot1=-9$$

(vi) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3+3x)-\log(3)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3(1+x))-\log(3)}=$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3)+\log(1+x))-\log(3)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(1+x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(1+x)}\frac{x}{2x}=$$
$$2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{x}{\log(1+x)}=2\cdot1\cdot1=2$$

(vii) $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\sin x\ln x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{\sin x}{x}x\ln x}=\lim_{x\to0^+}e^{-x\ln x}$$ e ricordando che per le gerarchie di infinitesimi abbiamo $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$ possiamo scrivere $\lim_{x\to0^+}e^{-x\ln x}=e^0=1$

(ix) Notiamo che $\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x=0$ quindi $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x\right)}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1}=$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x\right)}{e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-x\ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1}\overset{\frac{1}{x}=y}{=}$$
$$\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}-\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y^2}-1}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}+\frac{\ln y}{y}}{e^{-y^2\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}-1}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}+\frac{\ln y}{y}}{e^{-y\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}}}-1}=$$
$$\lim_{y\to\infty}\frac{e^{-y}+\frac{\ln y}{y}}{e^{-y}-1}=\frac{0+0}{0-1}=0$$

(x) $$\lim_{x\to-\infty}x^2\arctan(x)\left[\left(\frac{x^2+\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}x^2\arctan(x)\left[\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}-1\right]=$$
$$\lim_{x\to-\infty}x^2\arctan(x)\left[\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{\ln|x|}\frac{1}{x^2}}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}x^2\arctan(x)\left[e^{\frac{1}{x^2}}\frac{\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{\ln|x|}\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}-1\right]=$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \arctan(x)\left[e^{\frac{1}{x^2}}-1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \arctan(x)\left[\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \arctan(x)\left[1\cdot\frac{1}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

(xi) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(2-\operatorname{sgn} x)}{\sqrt[4]{x^4+x^{12}}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(2-(+1))}{\sqrt[4]{x^4+x^{12}}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{0}{\sqrt[4]{x^4+x^{12}}} = 0$

(xii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x!)-\ln(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x!}{x}\right)}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln((x-1)!)}{x^4}$. Ora notiamo che $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x!)}{n^4} = 0$ poiché per la gerarchia degli infiniti un polinomio cresce più velocemente del logaritmo di $x!$. Quindi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln((x-1)!)}{x^4} = 0$.

(xiii) $\lim\limits_{x\to-\pi^+} \frac{\sin\left(\sinh\left(\frac{1}{x+\pi}\right)\right)}{(x+\pi)^{-\frac{1}{x+\pi}}} = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{\sin\left(\sinh\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{(t)^{-\frac{1}{t}}}$, facendo la sostituzione $t = x+\pi$. Ora $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{\sin\left(\sinh\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{(t)^{-\frac{1}{t}}} = \lim\limits_{z\to+\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{\left(\frac{1}{z}\right)^{-z}}$ facendo una seconda sostituzione $z = \frac{1}{t}$. $\lim\limits_{z\to+\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{\left(\frac{1}{z}\right)^{-z}} = \lim\limits_{z\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)}{z^z} = 0$ poichè il seno è una funzione che oscilla mentre z^z è una funzione che cresce all'infinito.

Esercizio 3.

$\lim\limits_{x\to a^+} \chi_{[a,b]}(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a^-} \chi_{[a,b]}(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to b^+} \chi_{[a,b]}(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to b^-} \chi_{[a,b]}(x) = 1.$