Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Tutorato 4

Esercizio 1. Studiare le seguenti funzioni:

(i) $f(x) = (3x - x^2)e^{-x}$

(ii) $f(x) = \dfrac{9(x+1)}{(x+2)^3}$

(iii) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(iv) $f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{3x+2}$

(v) $f(x) = \ln^2(|2x|)$

(vi) $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

(vii) $f(x) = \dfrac{x\ln(5x)}{2 - 3\ln(x)}$

(viii) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(1 - x^2)}$

(ix) $f(x) = \dfrac{1 - |x^2 - 2|}{|x|}$

(x) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

(xi) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ (Sigmoide)

(xii) $f(x) = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$, con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ (Versiera di Agnesi)

(xiii) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ con $\sigma \in \mathbb{R}_{\neq 0}, \mu \in \mathbb{R}$ (Distribuzione gaussiana)

(xiv) $f(x) = \max\limits_{t \in [0,\pi]} \{tx + \sin t\}$ (Trasformata di Legendre di $g(t) = -\sin t$)

Esercizio 2.

Fissato un parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

Indichiamo con Ω_a il grafico di $f_a(x)$, ovvero l'insieme

$$\Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = f_a(x)\}$$

(i) Al variare del parametro a, determinare il dominio di $f_a(x)$, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

(ii) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

(iii) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione $f_a(x)$; studiare quindi la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

(iv) Studiare il grafico Ω_a al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. L' n-esimo polinomio di Hermite è definito come

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}] \text{ per } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

dove si intende $H_0(x) = 1$.

(i) Esplicitare $H_n(x)$ per $n \in \{1, 2, 3\}$.

(ii) Verificare che vale la seguente formula di ricorsione utilizzando le proprietà di derivazione:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) \text{ per ogni } n \geq 0$$

(iii) Mostrare per induzione su n che $H_n(x)$ è un polinomio di grado n, il cui coefficiente relativo alla potenza massima è 2^n.

(iv) Usare i punti precedenti per verificare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)} = 2x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = 2^{n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$