(i)

$$f(x) = (3x - x^2)\,e^{-x} = \frac{3x - x^2}{e^x}$$

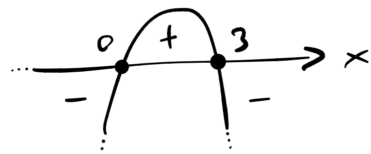
DOMINIO:

ESSENDO $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, IL DOMINIO DI $f(x)$ È $D = \mathbb{R}$

SEGNO E ZERI DI $f(x)$:

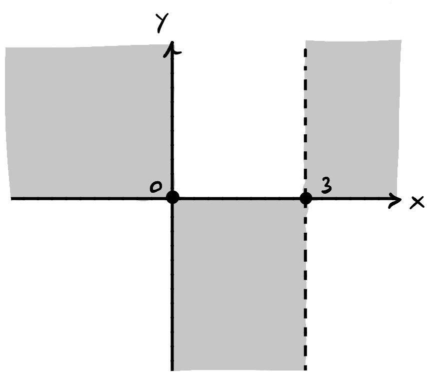
IL DENOMINATORE È SEMPRE POSITIVO, QUINDI IL SEGNO DI $f(x)$ DIPENDE INTERAMENTE DAL NUMERATORE

$$3x - x^2 \geq 0 \iff x(3 - x) \geq 0$$



IN CONCLUSIONE

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < 3$$
$$f(x) = 0 \iff x = 0 \ \vee \ x = 3$$
$$f(x) < 0 \iff x < 0 \ \vee \ x > 3$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - x^2}{e^x} = 0$$

e^x CRESCE PIÙ VELOCEMENTE DI OGNI POLINOMIO

QUINDI $y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

$$\lim_{x \to -\infty} (3x - x^2) e^{-x} \underset{y=-x}{=} \lim_{y \to \infty} (3(-y) - (-y)^2) e^y =$$

$$= \lim_{y \to \infty} (-3y - y^2) e^y = -\infty$$

C'È ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO ?

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{y=-x}{=} \lim_{y \to \infty} \frac{(-3y - y^2) e^y}{y} =$$

$$= \lim_{y \to \infty} (-3 - y) e^y = -\infty$$

NON C'È ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO

DERIVATA PRIMA:

$$y = (3x - x^2)e^{-x}$$

$$y' = (3-2x)e^{-x} + (3x - x^2)(-e^{-x}) =$$

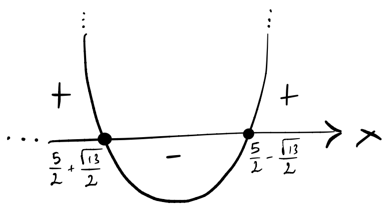
$$= e^{-x}(3 - 2x - 3x + x^2) =$$

$$= \underbrace{\boxed{e^{-x}}}_{>0}(x^2 - 5x + 3)$$

IL SEGNO DI y' DIPENDE SOLO DAL SEGNO DI $x^2 - 5x + 3$

PONIAMO $x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$



$f'(x)$ CRESCE $\longleftrightarrow$ $x > \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \vee x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

$f'(x)$ HA PUNTI STAZIONARI PER $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ (MASSIMO ASSOLUTO) E PER $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ (MINIMO RELATIVO)

$f'(x)$ DECRESCE $\longleftrightarrow$ $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} < x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

DERIVATA SECONDA:

$$y' = e^{-x}(x^2 - 5x + 3)$$

$$y'' = (2x-5)e^{-x} + (x^2 - 5x + 3)(-e^{-x}) =$$

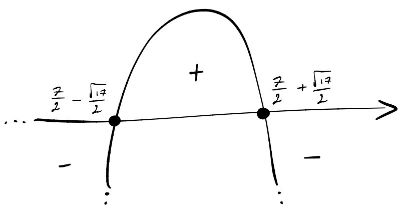
$$= e^{-x}(2x - 5 - x^2 + 5x - 3) =$$

$$= \underbrace{\boxed{e^{-x}}}_{>0}(-x^2 + 7x - 8)$$

IL SEGNO DI y' DIPENDE SOLO DAL SEGNO DI $-x^2 + 7x - 8$

PONIAMO $-x^2 + 7x - 8 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 32}}{-2} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{-2} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$



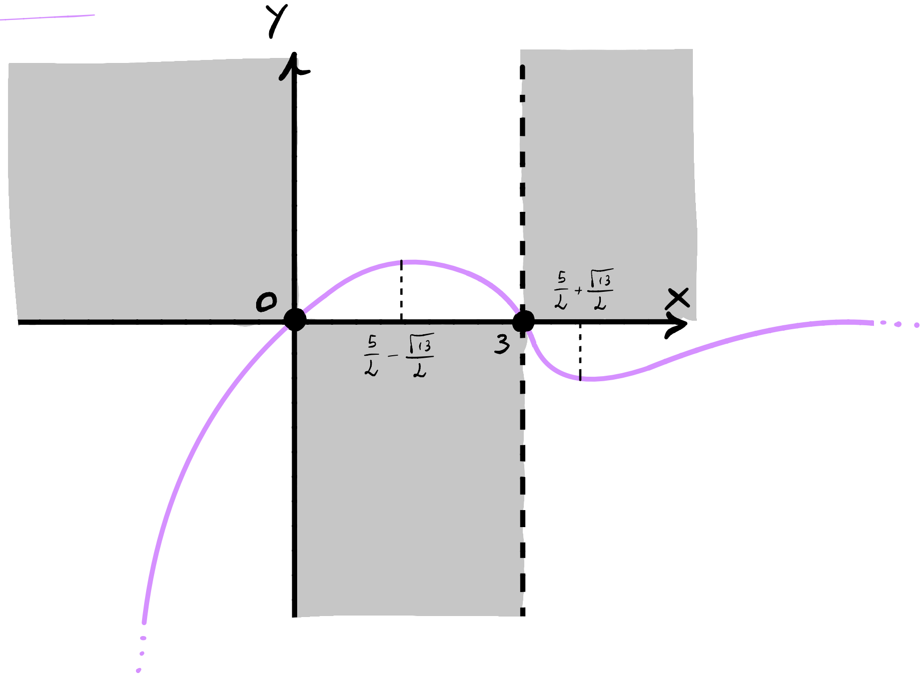
QUINDI

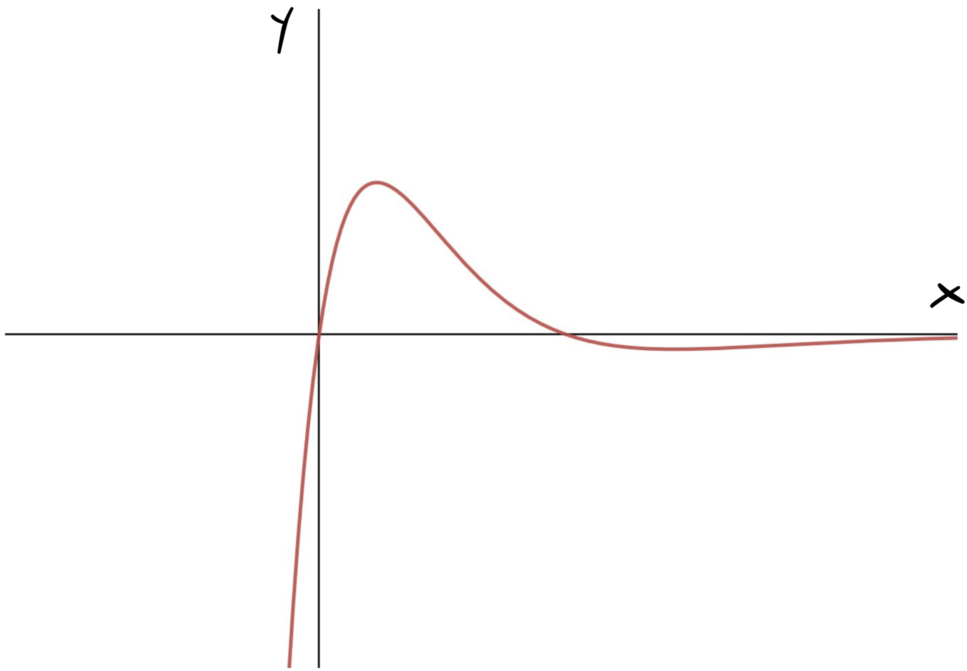
$f(x)$ È CONCAVA IN ALTO $\longleftrightarrow$ $\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < x < \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$f(x)$ È CONCAVA IN BASSO $\longleftrightarrow$ $x < \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \vee x > \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$f(x)$ HA FLESSI PER $x = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

GRAFICO :





(ii)

$$f(x) = \frac{9(x+1)}{(x+2)^3}$$

DOMINIO:

$(x+2)^3 \neq 0 \longrightarrow x \neq -2$

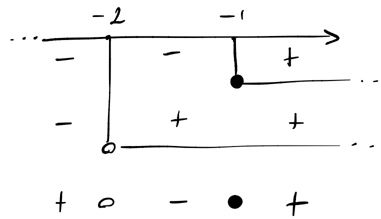
IL DOMINIO È $D = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

SEGNO:

PONIAMO $\dfrac{9(x+1)}{(x+2)^3} \geq 0$

$x+1 \geq 0 \longleftrightarrow x \geq -1$

$(x+2)^3 > 0 \longleftrightarrow x > -2$



INTERSEZIONI CON ASSE x:

$y = \dfrac{9(x+1)}{(x+2)^3} = 0 \longleftrightarrow x = -1$

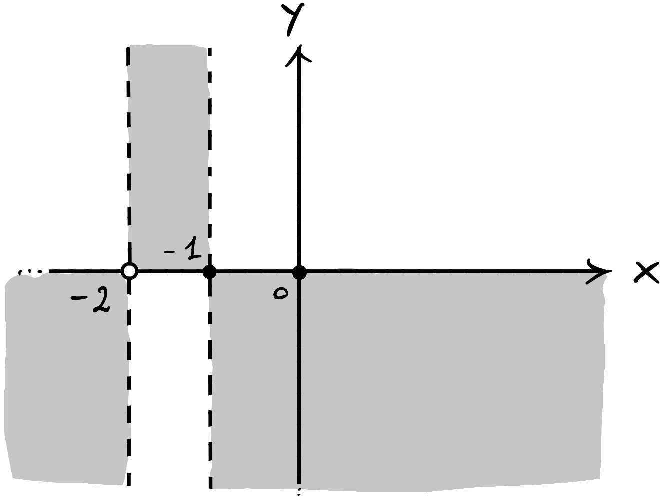
L'INTERSEZIONE È $(x, y) = (-1, 0)$

$\Downarrow$

$f(x) > 0 \longleftrightarrow x < -2 \vee x > -1$

$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = -1$

$f(x) < 0 \longleftrightarrow -2 < x < -1$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} = 9 \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^3} =$$

$$= 9 \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)^3} = 3 \cdot 0 = 0$$

$\Longrightarrow$ $Y=0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO E SINISTRO

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} = \mp\infty$$

PER IL SEGNO BASTA GUARDARE LO STUDIO DEL SEGNO FATTO IN PRECEDENZA

$\Longrightarrow$ $X=-2$ È ASINTOTO VERTICALE

DERIVATA PRIMA:

$$y = \frac{9(x+1)}{(x+2)^3}$$

$$y' = 9 \cdot \frac{1 \cdot (x+2)^3 - (x+1)\,3(x+2)^2}{(x+2)^6} =$$

$$= 3(x+2)^2 \frac{(x+2) - 3(x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 3 \frac{-2x-1}{(x+2)^4}$$

$$-2x-1 > 0 \longleftrightarrow x < -1/2 \wedge x \neq -2$$

$$-2x-1 = 0 \longleftrightarrow x = -1/2$$

$$-2x-1 < 0 \longleftrightarrow x > -1/2$$

$$\Downarrow$$

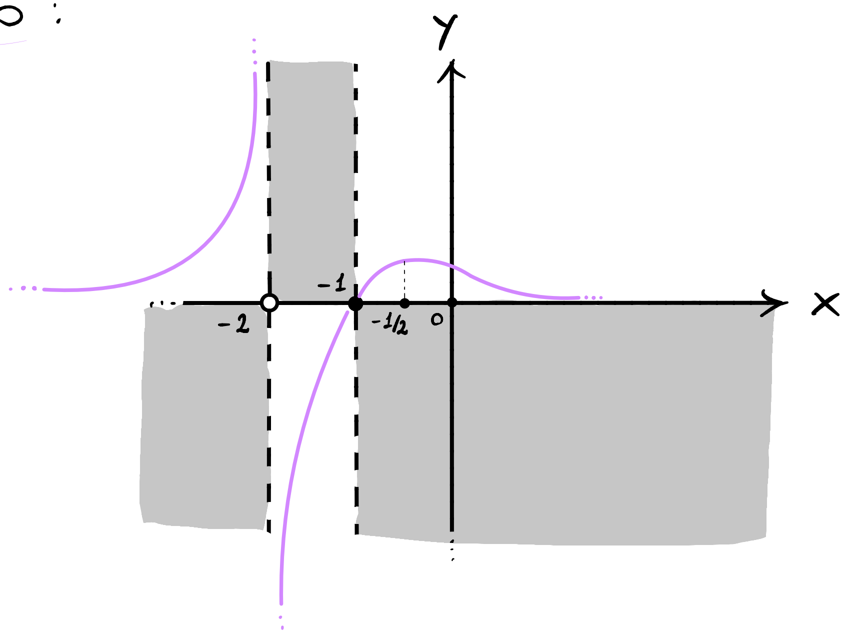
$f(x)$ CRESCE $\longleftrightarrow x < -1/2 \wedge x \neq -2$

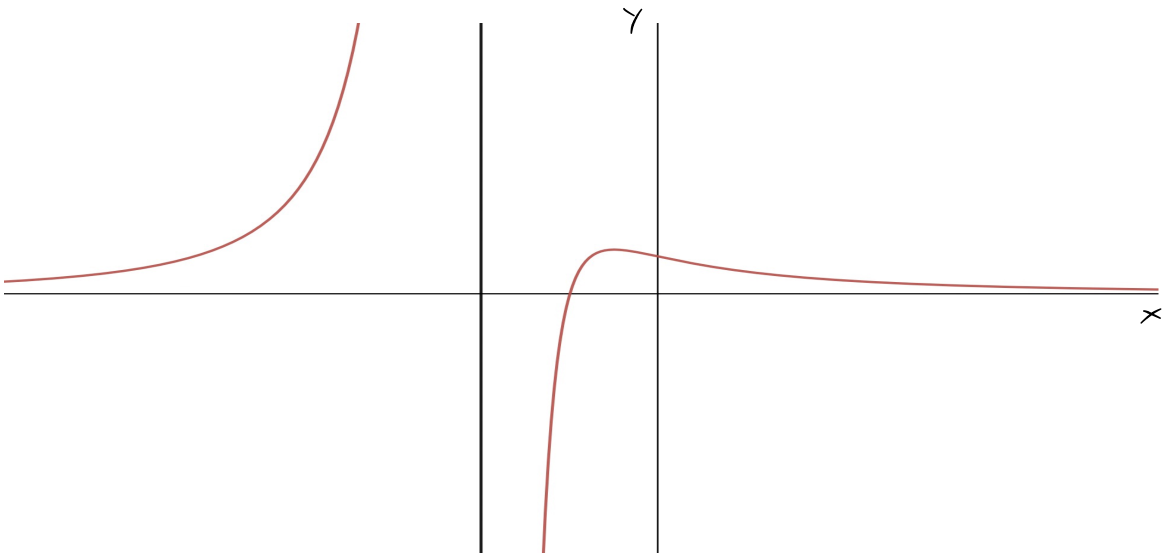
$f(x)$ HA UN PUNTO STAZ. PER $x = -1/2$
(SI TRATTA DI UN MASSIMO RELATIVO)

$f(x)$ DECRESCE $\longleftrightarrow x > -1/2$

LO STUDIO DELLA DERIVATA
SECONDA È TRASCURABILE
(CI ASPETTIAMO LA PRESENZA
DI UN UNICO FLESSO)

GRAFICO:





(iii)

$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

DOMINIO:

$4 - x^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 \leq 4 \longrightarrow -2 \leq x \leq 2$

IL DOMINIO È $D = [-2; 2]$

SEGNO:

LA RADICE È SEMPRE POSITIVA, PERCIÒ IL SEGNO DI $f(x)$ DIPENDE SOLO DAL SEGNO DEL FATTORE x; OLTRETUTTO

$x\sqrt{4-x^2} = 0 \leftrightarrow x = 0 \lor 4 - x^2 = 0$

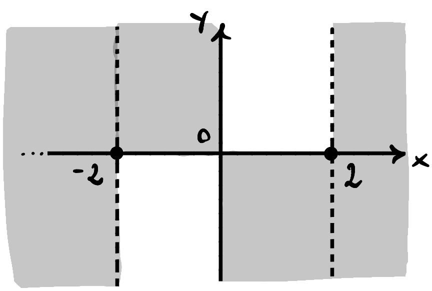
$\leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$

QUINDI

$f(x) > 0 \longleftrightarrow 0 < x < 2$

$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$

$f(x) < 0 \longleftrightarrow -2 < x < 0$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

LA FUNZIONE È DEFINITA IN UN INSIEME COMPATTO, CIOÈ CHIUSO E LIMITATO, PERCIÒ NON È NECESSARIO STUDIARE ALCUN LIMITE

SIMMETRIE:

NOTIAMO CHE $f(x)$ È DISPARI, INFATTI

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

QUINDI IL GRAFICO SARÀ SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE

DERIVATA PRIMA:

$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left((4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right) = (-2x)\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1} =$$

$$= -x(4-x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = \sqrt{4-x^2} + x\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 2\,\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} =$$

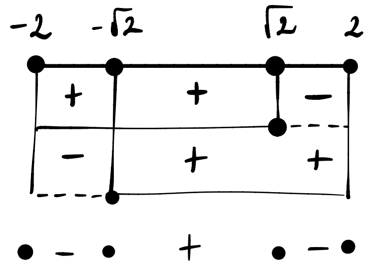
$$= 2\,\frac{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

PONIAMO

$$y' = 2\,\frac{(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\boxed{\sqrt{4 - x^2}}} \geq 0 \qquad >0$$

$$\sqrt{2} - x \geq 0 \longleftrightarrow x \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + x \geq 0 \longleftrightarrow x \geq -\sqrt{2}$$



OLTRETUTTO $y' = 0 \longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ QUINDI

$f(x)$ CRESCE $\longleftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$f(x)$ DECRESCE $\longleftrightarrow -2 \leq x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x \leq 2$

$f(x)$ HA UN MINIMO ASSOLUTO PER $x = -\sqrt{2}$ CON VALORE $f(-\sqrt{2}) = -2$

$f(x)$ HA UN MASSIMO ASSOLUTO PER $x = -\sqrt{2}$ CON VALORE $f(\sqrt{2}) = 2$

DA NOTARE ANCHE CHE

$\lim_{x \to \pm 2} y' = \mp \infty$, OVVERO LE DUE

TANGENTI AL GRAFICO NEI PUNTI

$(-2;0)$ E $(2;0)$ SONO RETTE VERTICALI

DERIVATA SECONDA:

LIMITIAMOCI A CERCARE I FLESSI

POICHÉ LA CONCAVITÀ SARÀ POI

CHIARA DAL CONTESTO

$$y' = 2\,\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'' = 2\,\frac{-2x\sqrt{4-x^2} - (2-x^2)\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(4-x^2)} =$$

$$= 2\,\frac{-2x(4-x^2) + x(2-x^2)}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\,\frac{-8x + 2x^3 + 2x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = 2\,\frac{x^3 - 6x}{(4-x^2)^{3/2}}$$

PONIAMO $y'' = 0$

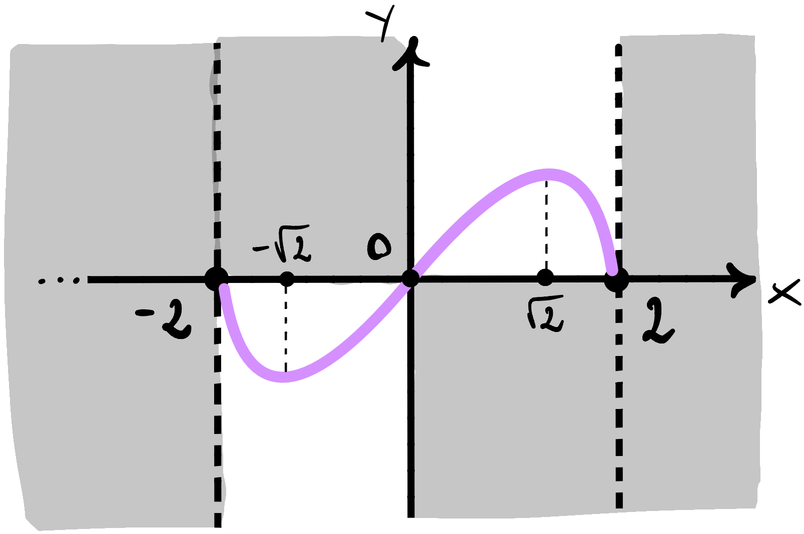
$x^3 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \lor x = \pm\sqrt{6}$

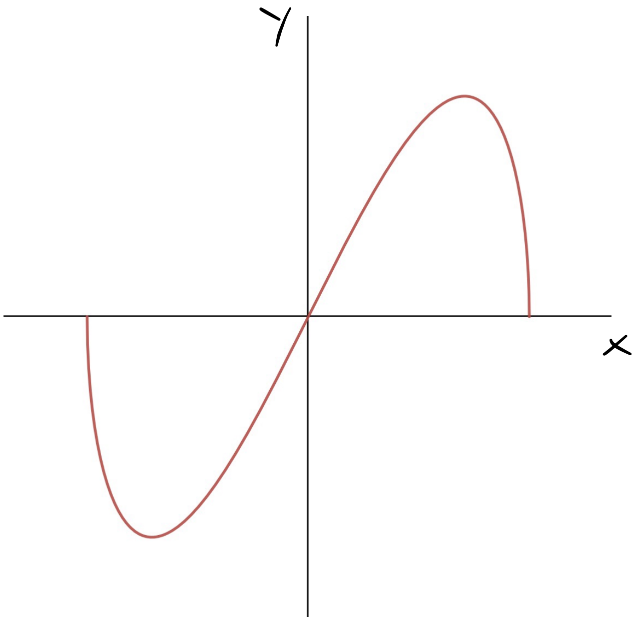
$0 \in D$ MENTRE $\pm\sqrt{6} \notin D$

QUINDI C'È UN UNICO FLESSO

IN CORRISPONDENZA DI $x = 0$

GRAFICO:





(viii)

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)}$$

DOMINIO:

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ \ln(1-x^2)\neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2<1 \\ 1-x^2\neq 1 \end{cases} \to \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

IL DOMINIO È $D = (-1;0) \cup (0;1)$

SIMMETRIE:

$f(x)$ È PARI, INFATTI

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\ln(1-(-x)^2)} = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = f(x)$$

QUINDI IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y: STUDIAMO SOLO IL CASO $0<x<1$

SEGNO:

IL NUMERATORE È POSITIVO; $1-x^2$ È MINORE DI 1, QUINDI $\ln(1-x^2)$ È NEGATIVO, PER CUI $f(x)<0$ SU TUTTO IL DOMINIO

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{T \to 0} \frac{\ln(1+T)}{T} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x \to 0^+} - \frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} = -1$$

$x=0$ È UNA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

DERIVATA PRIMA:

$$y = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)}$$

$$y' = \frac{2x\ln(1-x^2) - x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)}{\ln^2(1-x^2)} =$$

$$= \underbrace{\boxed{2x}}_{>0} \frac{\ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}}{\underbrace{\boxed{\ln^2(1-x^2)}}_{>0}}$$

(DIFFICILE ↓)

IL SEGNO DI y' DIPENDE INTERAMENTE DAL SEGNO DI

$$g(x) = \ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}$$

PERCIÒ STUDIAMO IL SEGNO DI $g(x)$ PER $0 < x < 1$

$$g(x) = \ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x(1-x^2) + 2x}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$

$g'(x) > 0$ PER $0 < x < 1$

QUINDI $g(x)$ CRESCE PER $0 < x < 1$

OLTRETUTTO $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ DA CUI DEDUCIAMO CHE $g(x)$ È POSITIVA PER $0 < x < 1$; IN CONCLUSIONE $f(x)$ È CRESCENTE PER $0 < x < 1$

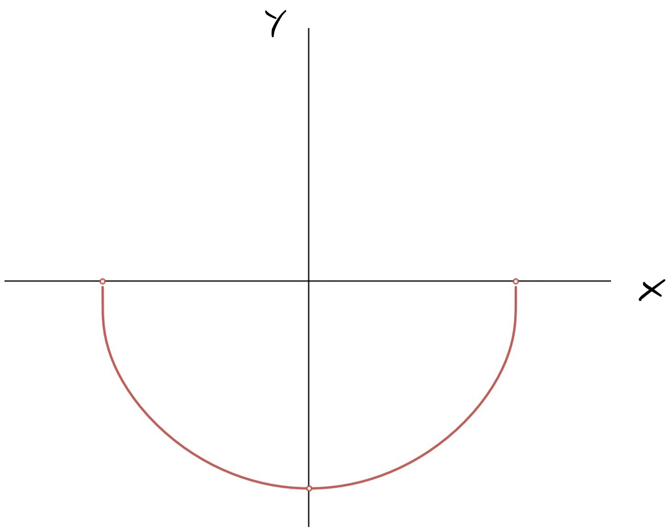
NOTIAMO ANCHE CHE $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ CIOÈ $f(x)$ HA UN PUNTO STAZIONARIO (MINIMO ASSOLUTO) IN CORRISPONDENZA DELLA SINGOLARITÀ ELIMINABILE $x = 0$

DA NOTARE ANCHE CHE

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$$

TRASCURIAMO LA DERIVATA SECONDA (NON CI ASPETTIAMO LA PRESENZA DI FLESSI)

GRAFICO:



(ix)

$$f(x) = \frac{1-|x^2-2|}{|x|}$$

DOMINIO:

$|x| \neq 0 \longrightarrow x \neq 0$

IL DOMINIO È $D = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

SIMMETRIE:

NOTIAMO CHE $f(x)$ È PARI, INFATTI

$$f(-x) = \frac{1-|(-x)^2-2|}{|-x|} = \frac{1-|x^2-2|}{|x|} = f(x)$$

QUINDI STUDIAMO $f(x)$ SOLO PER $x > 0$, POICHÉ IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y:

QUINDI STUDIAMO $f(x) = \frac{1-|x^2-2|}{x}$ PER $x > 0$

(HO TOLTO IL MODULO A DENOMINATORE POICHÉ x È POSITIVO)

COME OCCUPARCI DEL MODULO:

$$x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \iff x \leq -\sqrt{2} \lor x \geq \sqrt{2}$$

QUINDI LA FUNZIONE DA STUDIARE È

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-(x^2-2)}{x} & \text{SE } x \geq \sqrt{2} \\[2ex] \dfrac{1+(x^2-2)}{x} & \text{SE } 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

(NELLA PRIMA ESPRESSIONE HO SEMPLICEMENTE TOLTO IL MODULO, MENTRE NELLA SECONDA HO TOLTO IL MODULO METTENDO UN $-$ DAVANTI)

SEGNO:

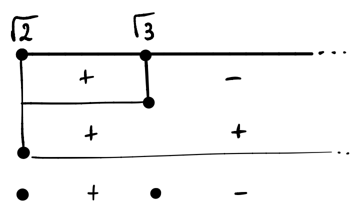
PER $x \geq \sqrt{2}$

$$Y = \frac{1-(x^2-2)}{x} = \frac{3-x^2}{x} = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x}$$

PONIAMO $\dfrac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x} \geq 0$

$(\sqrt{3}-x) \geq 0 \iff x \leq \sqrt{3}$

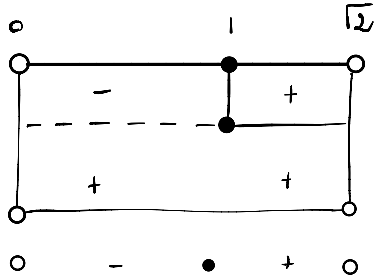
$(\sqrt{3}+x) \geq 0 \iff x \geq -\sqrt{3}$
QUINDI ANCHE PER OGNI $x \geq \sqrt{2}$



PER $0 < x < \sqrt{2}$

$$Y = \frac{1 + (x^2 - 2)}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

PONIAMO $\frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$



$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

$x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$

QUINDI ANCHE PER OGNI $0 < x < \sqrt{2}$

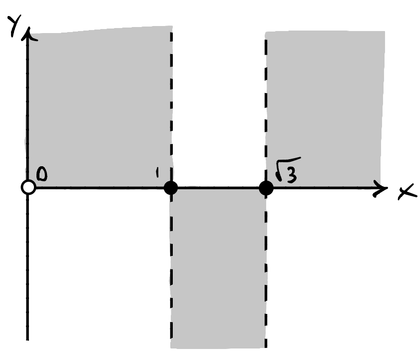
SI EVINCE ANCHE CHE LE INTERSEZIONI CON L'ASSE X SONO I PUNTI $(1,0)$ E $(\sqrt{3},0)$

IN CONCLUSIONE, SEMPRE ASSUMENDO $x > 0$, ABBIAMO

$f(x) > 0 \iff 1 < x < \sqrt{3}$

$f(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = \sqrt{3}$

$f(x) < 0 \iff 0 < x < 1 \vee x > \sqrt{3}$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-(x^2-2)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x(1)} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-0)}{1} = -\infty$$

NON C'È ASINTOTO ORIZZONTALE;

C'È ASINTOTO OBLIQUO?

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2+3}{x} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3+x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

QUINDI $y = \underbrace{-1}_{m} \cdot x + \underbrace{0}_{q}$ È ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+(x^2-2)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$$

PER IL SEGNO BASTA GUARDARE LO STUDIO DEL SEGNO FATTO IN PRECEDENZA

QUINDI $x = 0$ È ASINTOTO VERTICALE

DERIVATA PRIMA:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+3}{x} & \text{SE } x \geq \sqrt{2} \\ \dfrac{x^2-1}{x} & \text{SE } 0<x<\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x^2+3}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(-x+3x^{-1}\right)=-1+3\cdot(-1)x^{-2}=$$

$$=-1-\frac{3}{x^2}=\frac{-x^2-3}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x-x^{-1}\right)=1+x^{-2}=$$

$$=1+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-(x^2+3)}{x^2} & \text{SE } x>\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2+1}{x^2} & \text{SE } 0<x<\sqrt{2} \end{cases}$$

NOTIAMO CHE

$f'(x)<0$ PER $x>\sqrt{2}$

$f'(x)>0$ PER $0<x<\sqrt{2}$

COSA SUCCEDE PER $x=\sqrt{2}$?

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f'(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f'(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{-(x^2+3)}{x^2}=-\frac{5}{2}$$

$$f(\sqrt{2})=\left.\frac{-x^2+3}{x}\right|_{x=\sqrt{2}}=\frac{-2+3}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow$ $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ È PUNTO ANGOLOSO

CONCLUDIAMO CHE

$f(x)$ CRESCE $\longleftrightarrow$ $0 < x < \sqrt{2}$

$f(x)$ DECRESCE $\longleftrightarrow$ $x > \sqrt{2}$

LO STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA È TRASCURABILE (CI ASPETTIAMO CHE NON CI SIANO FLESSI)

GRAFICO (PER $x>0$):

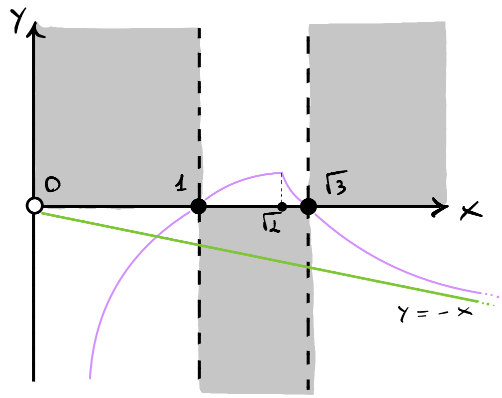
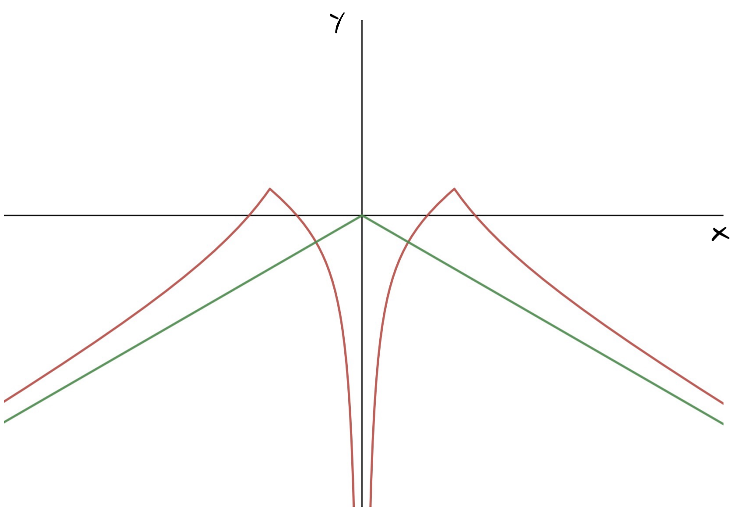


GRAFICO FINALE:



(x)

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

DOMINIO:

IL DOMINIO È $D = \mathbb{R}$

SEGNO:

$f(x)$ È SEMPRE POSITIVA,
POICHÉ $f(x) = e^{g(x)}$ ED $e^T > 0 \ \forall T \in \mathbb{R}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^{\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1}\right)} =$$

$$= e^{\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2(1+1/x^2)}\right)} = e^{\left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x\ (1+0)}\right)} =$$

$$= e^0 = 1$$

QUINDI $y = 1$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO E SINISTRO

DERIVATA PRIMA :

$$Y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$Y' = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right) =$$

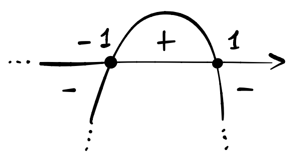
$$= e^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2 \underbrace{\boxed{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}}_{>0} \frac{1-x^2}{\underbrace{\boxed{(x^2+1)^2}}_{>0}}$$

IL SEGNO DI Y' DIPENDE SOLO DAL SEGNO DI $1-x^2$

PONIAMO $1-x^2 \geq 0$

$$x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$



QUINDI

$f(x)$ CRESCE $\longleftrightarrow$ $-1 < x < 1$

$f(x)$ DECRESCE $\longleftrightarrow$ $x < -1 \vee x > 1$

$f(x)$ HA PUNTI STAZIONARI PER $x = -1$ (MINIMO ASSOLUTO) E PER $x = 1$ (MASSIMO ASSOLUTO)

$\left(-1; e^{\frac{2(-1)}{(-1)^2+1}}\right) = (1; e^{-1})$ È MIN. ASS.

$\left(1; e^{\frac{2 \cdot 1}{1^2+1}}\right) = (1; e)$ È MAX. ASS.

DERIVATA SECONDA:

(MOLTO DIFFICILE)

QUESTO PUNTO È DEL TUTTO FACOLTATIVO: IL GRAFICO DI $f(x)$ PUÒ ESSERE DISEGNATO IN MANIERA SODDISFACENTE ANCHE SENZA STUDIARE LA DERIVATA SECONDA

$$y' = 2e^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \left[2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right]^2 + e^{\frac{2x}{x^2+1}} \, 2 \, \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2+1}} \, 4\frac{(1-x^2)^2}{(x^2+1)^4} + e^{\frac{2x}{x^2+1}} \, 2 \, \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)2x \cdot 2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4}\left\{2(1-x^2)^2 - 2x(x^2+1)^2 - 4x(1-x^2)(1+x^2)\right\} =$$

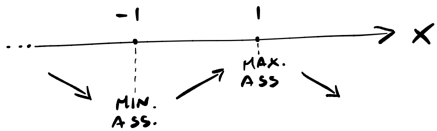
$$= \frac{2e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4}\left\{2(1+x^4-2x^2) - 2x(x^4+1+2x^2) - 4x(1-x^4)\right\} =$$

$$= \frac{2e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4}\left\{2+2x^4-4x^2-2x^5-2x-4x^3-4x+4x^5\right\} =$$

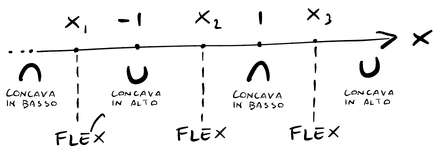
$$= \underbrace{\boxed{\frac{4e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^4}}}_{>0}\left(x^5+x^4-2x^3-2x^2-3x+1\right)$$

IL SEGNO DI y'' DIPENDE SOLO DA $x^5+x^4-2x^3-2x^2-3x+1$

RICORDANDO CHE $f(x)$ DECRESCE PER $x<-1$, CRESCE PER $-1<x<1$ E DECRESCE NUOVAMENTE PER $x>1$



E RICORDANDOCI DEL FATTO CHE $f(x)$ È LIMITATA ($y=1$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO E SINISTRO) CI ASPETTIAMO CHE $f(x)$ CAMBI CONCAVITÀ ALMENO 3 VOLTE: PRIMA DI -1, TRA -1 E 1, E DOPO -1



DIMOSTRIAMO CHE CI SONO ESATTAMENTE 3 CAMBI DI CONCAVITÀ, OVVERO CHE CI SONO ESATTAMENTE 3 FLESSI: PER FARLO PONIAMO $y''=0$, IL CHE CI PORTA A STUDIARE IL NUMERO DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE

$$x^5+x^4-2x^3-2x^2-3x+1=0$$

NON SAPPIAMO SE QUESTA EQUAZIONE SI PUÒ RISOLVERE ALGEBRICAMENTE, QUINDI PROCEDIAMO COME DI SEGUITO

PONIAMO

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

QUINDI $f(x)$ HA ALMENO UNO ZERO (CIOÈ UN'INTERSEZIONE CON L'ASSE x)

$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x - 3$$

PONIAMO $f'(x) = 0$ PER TROVARE EVENTUALI PUNTI STAZIONARI;

RISOLVERE $f'(x) = 0$ È DIFFICILE, PUÒ ESSERE FATTO ALGEBRICAMENTE MA PREFERIAMO PROCEDERE COME DI SEGUITO

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = +\infty$$

$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 - 12x - 4 =$$

$$= 20x^3 + 20 + 12x^2 - 12x - 24 =$$

$$= 20(x^3+1) + 12(x^2 - x - 2) =$$

$$= 20(x+1)(x^2 - x + 1) + 12(x+1)(x-2) =$$

$$= 4(x+1)\left[5x^2 - 5x + 5 + 3x - 6\right] =$$

$$= 4(x+1)(5x^2 - 2x - 1)$$

LE SOLUZIONI DI $f''(x)=0$

SONO $x \in \left\{ -1, \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{1-\sqrt{6}}{5} \right\}$

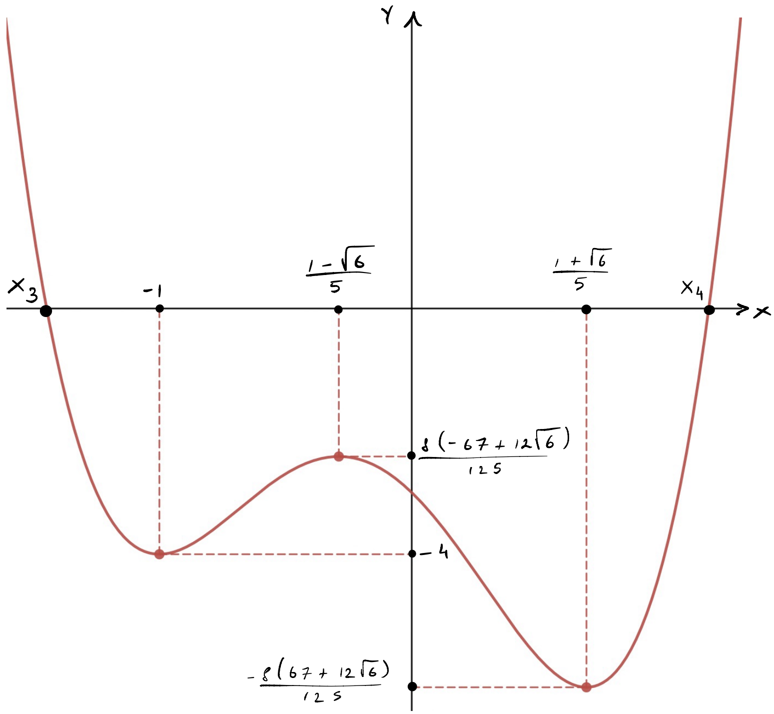
I PUNTI STAZIONARI DI $f'(x)$ SONO

$$\left(-1; f'(-1)\right) = (-1; -4)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}; f'\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)\right) = \left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}; -\frac{8(67+12\sqrt{6})}{125}\right)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}; f'\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\right) = \left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}; \frac{8(-67+12\sqrt{6})}{125}\right)$$

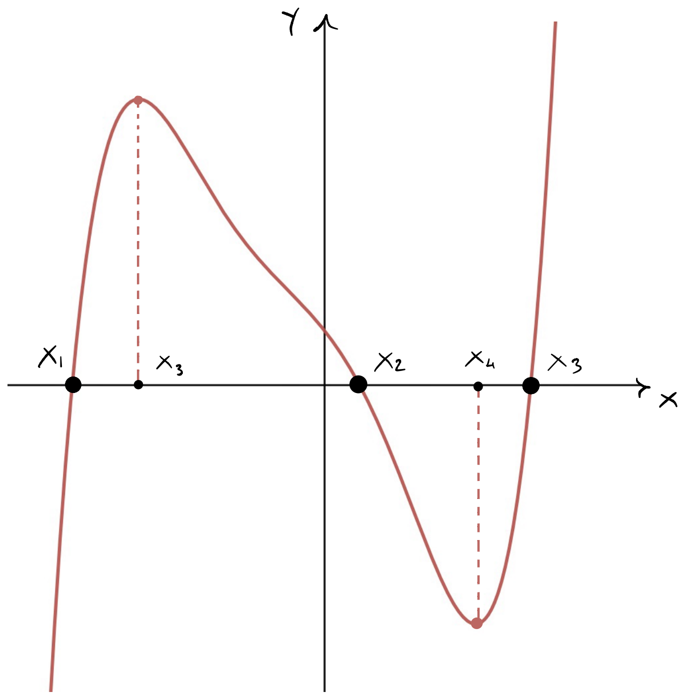
QUINDI IL GRAFICO DI $f'(x)$ QUALITATIVAMENTE È



QUANTO VISTO IN PRECEDENZA MOSTRA CHE $f'(x)$ HA 2 ZERI, UNO POSITIVO E UNO NEGATIVO (NEL GRAFICO SONO STATI CHIAMATI x_3 E x_4); OLTRETUTTO $x_3 < -1$ E $x_4 > \frac{1+\sqrt{6}}{5}$. ADESSO CI BASTA NOTARE CHE $f(-1) = 4 > 0$ MENTRE

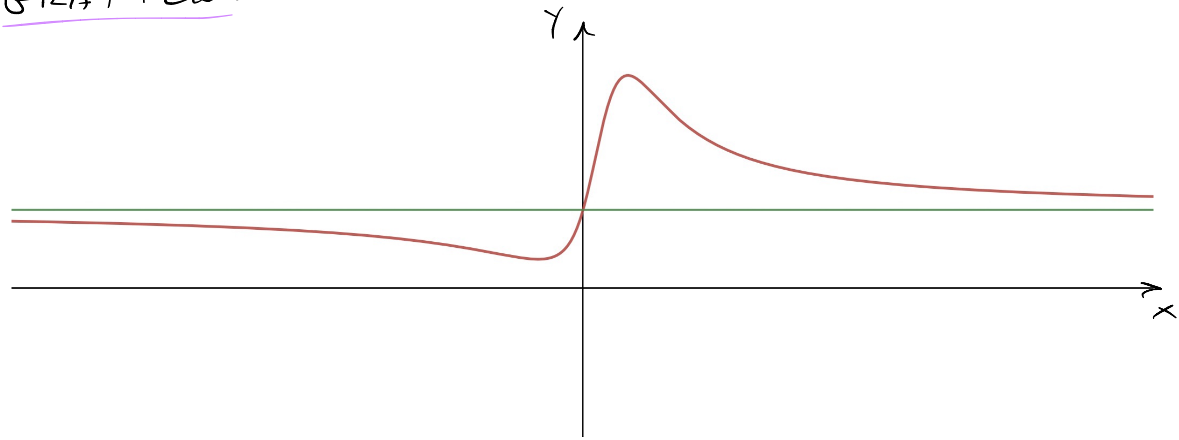
$$f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4(211 + 646\sqrt{6})}{3125} < 0,$$

QUINDI $(x_3, f(x_3))$ È MASSIMO RELATIVO DI $f(x)$, MENTRE $(x_4, f(x_4))$ È MINIMO RELATIVO DI $f(x)$, PERCIÒ IL GRAFICO DI $f(x)$ QUALITATIVAMENTE È



QUANTO È STATO FATTO È SUFFICIENTE PER DIMOSTRARE CHE $f''(x)$ E QUINDI $f''(x)$ HA ESATTAMENTE 3 ZERI (x_1, x_2 E x_3) PERCIÒ $f(x)$ HA ESATTAMENTE 3 FLESSI.

GRAFICO:



(xi)

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

DOMINIO:

IL DOMINIO È $D = \mathbb{R}$ POICHÉ e^{-x} È UNA QUANTITÀ POSITIVA PER OGNI x E DUNQUE IL DENOMINATORE È MAGGIORE DI 1 PER OGNI x

SEGNO:

SIA IL NUMERATORE CHE IL DENOMINATORE SONO SEMPRE POSITIVI, PERCIÒ $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$Y = 1$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

$Y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO

DERIVATA PRIMA:

$$y = \frac{1}{1+e^{-x}} = (1+e^{-x})^{-1}$$

$$y' = -(1+e^{-x})^{-2} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

CHIARAMENTE $y'>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
QUINDI $f(x)$ CRESCE SU TUTTO
IL SUO DOMINIO

DERIVATA SECONDA:

$$y' = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$y'' = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 - e^{-x} \cdot 2(1+e^{-x})(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} =$$

$$= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x}) + 2e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{(1+e^{-x})^3} =$$

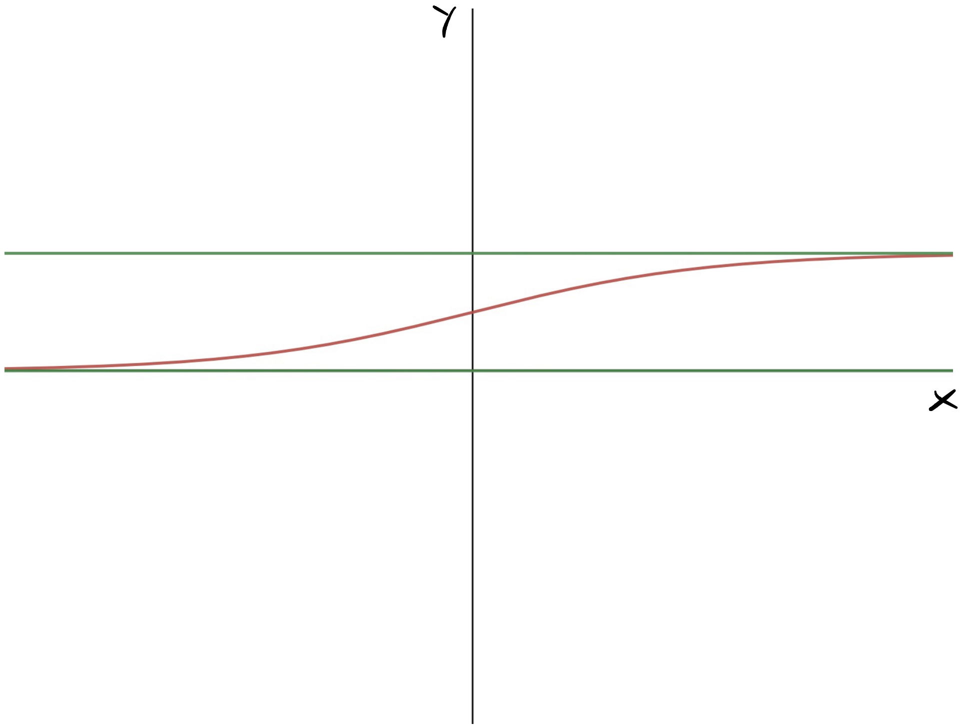
$$= \underbrace{\boxed{e^{-x}}}_{>0} \frac{e^{-x}-1}{\underbrace{\boxed{(1+e^{-x})^3}}_{>0}}$$

RICERCHIAMO I FLESSI PONENDO
$y''=0$ (LA CONCAVITÀ DI $f(x)$
SARÀ POI CHIARA DAL CONTESTO)

$$e^{-x}-1=0 \longleftrightarrow e^{-x}=1 \longleftrightarrow x=0$$

C'È UN FLESSO PER $x=0$

GRAFICO:



ESERCIZIO 1

(IV) $f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{3x+2}$

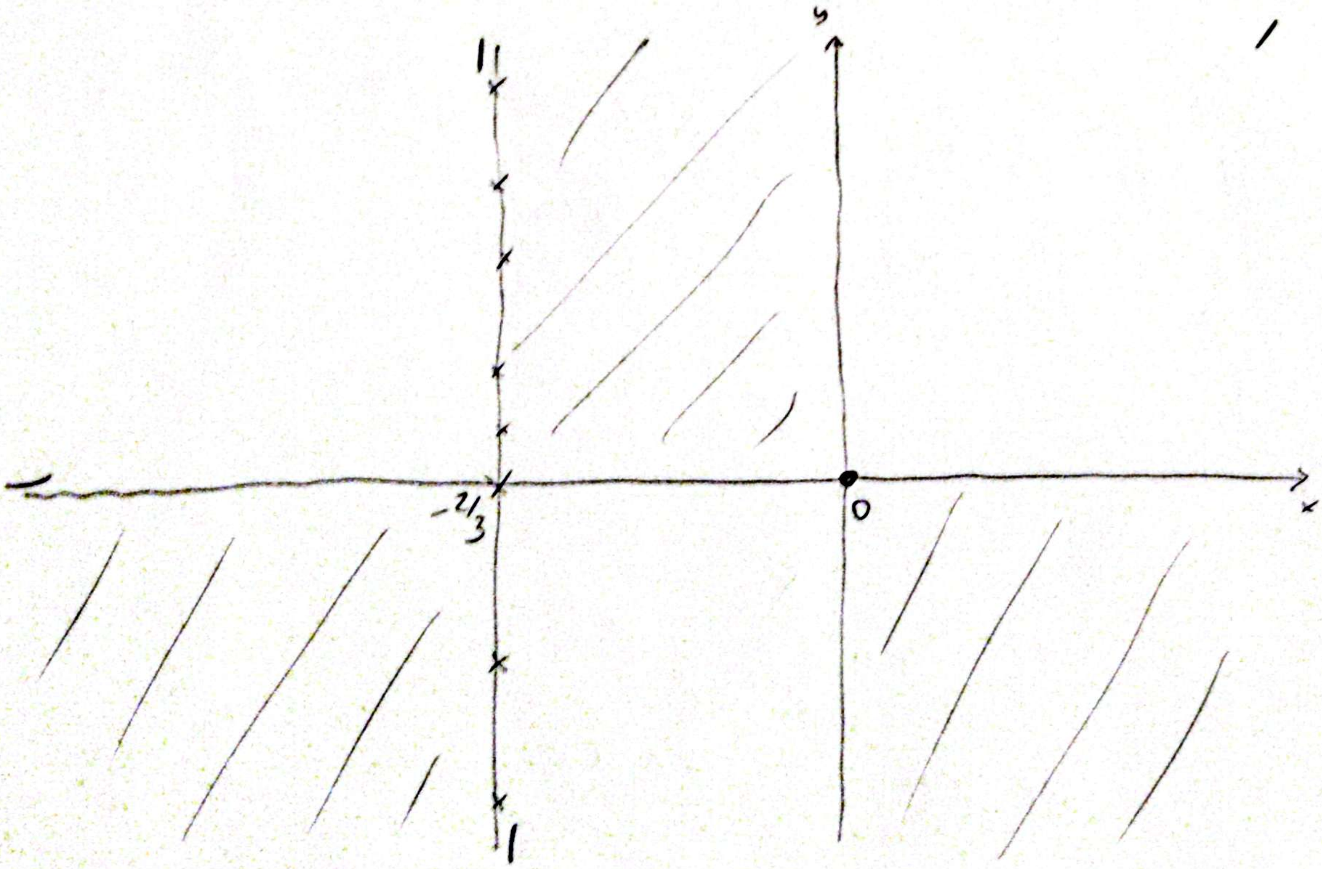
1) DOMINIO: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -2/3\}$

2) INTERSEZIONE ASSI E SEGNO:

$$\begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xe^{2x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{3x+2} \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad P = (0,0)$$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff \dfrac{xe^{2x}}{3x+2} \geq 0 \iff x < -2/3 \lor x \geq 0$



Asintoti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty$$

Quindi: $y=0$ AS. ORIZZ. SINISTRO

$x=-2$ AS. VERTICALE

Poiché $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ <u>NO</u> AS. OBLIQUO DESTRO

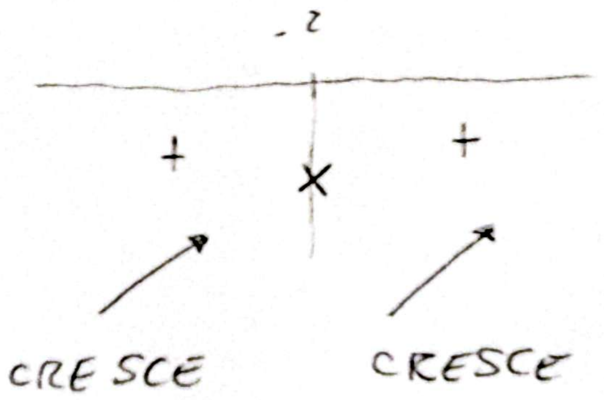
e poiché $y=0$ è AS. ORIZZ. SINISTRO $\Rightarrow$ <u>NO</u> AS. OBLIQUO SINISTRO

4) <u>MONOTONIA di $f(x)$:</u>

$$f'(x) = \frac{(6x^2+4x+2)e^{2x}}{(3x+2)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \iff 6x^2+4x+2 \geq 0$ ma $\Delta < 0$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



• <u>NO</u> MAX, <u>NO</u> MIN, <u>NO</u> FLESSI ORIZZONTALI

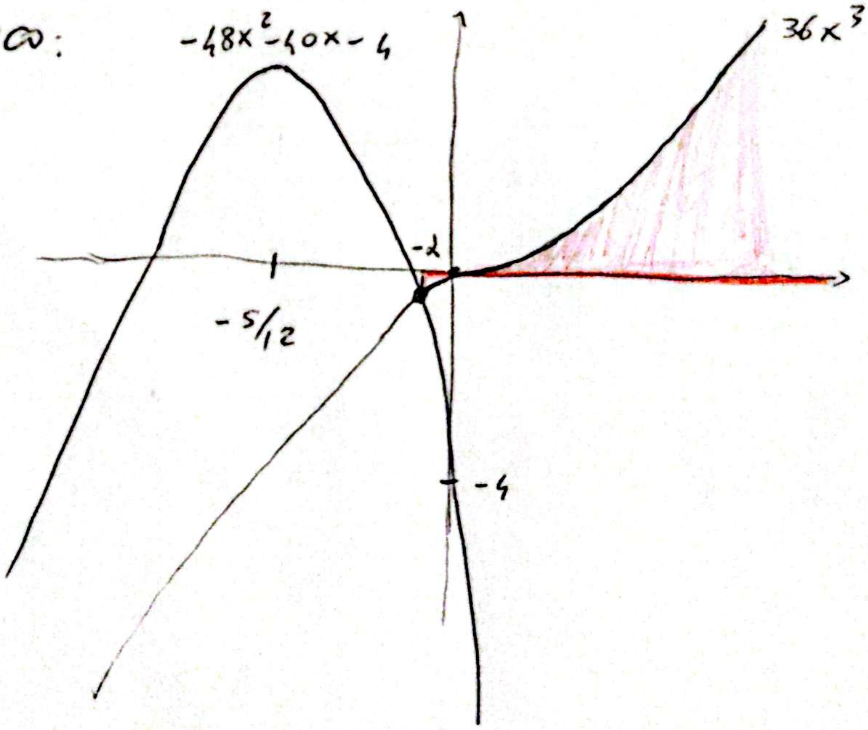
5) CONVESSITA' DI $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{(36x^3+48x^2+40x+4)\,e^{2x}}{(3x+2)^3}$$

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{36x^3+48x^2+40x+4}{(3x+2)^3} \geq 0$$

Oss) $36x^3+48x^2+40x+4 \geq 0 \iff \underbrace{36x^3}_{\text{cubica}} \geq \underbrace{-48x^2-40x-4}_{\text{parabola}}$

Uso METODO GRAFICO:

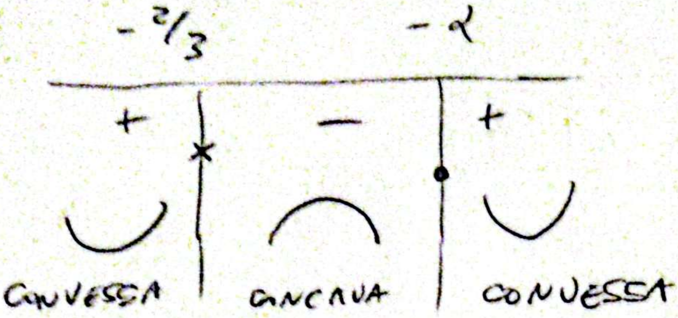


$0 \leq \alpha \leq 5/12$

Quindi $36x^3 \geq -48x^2-40x-4 \iff x \geq -\alpha$

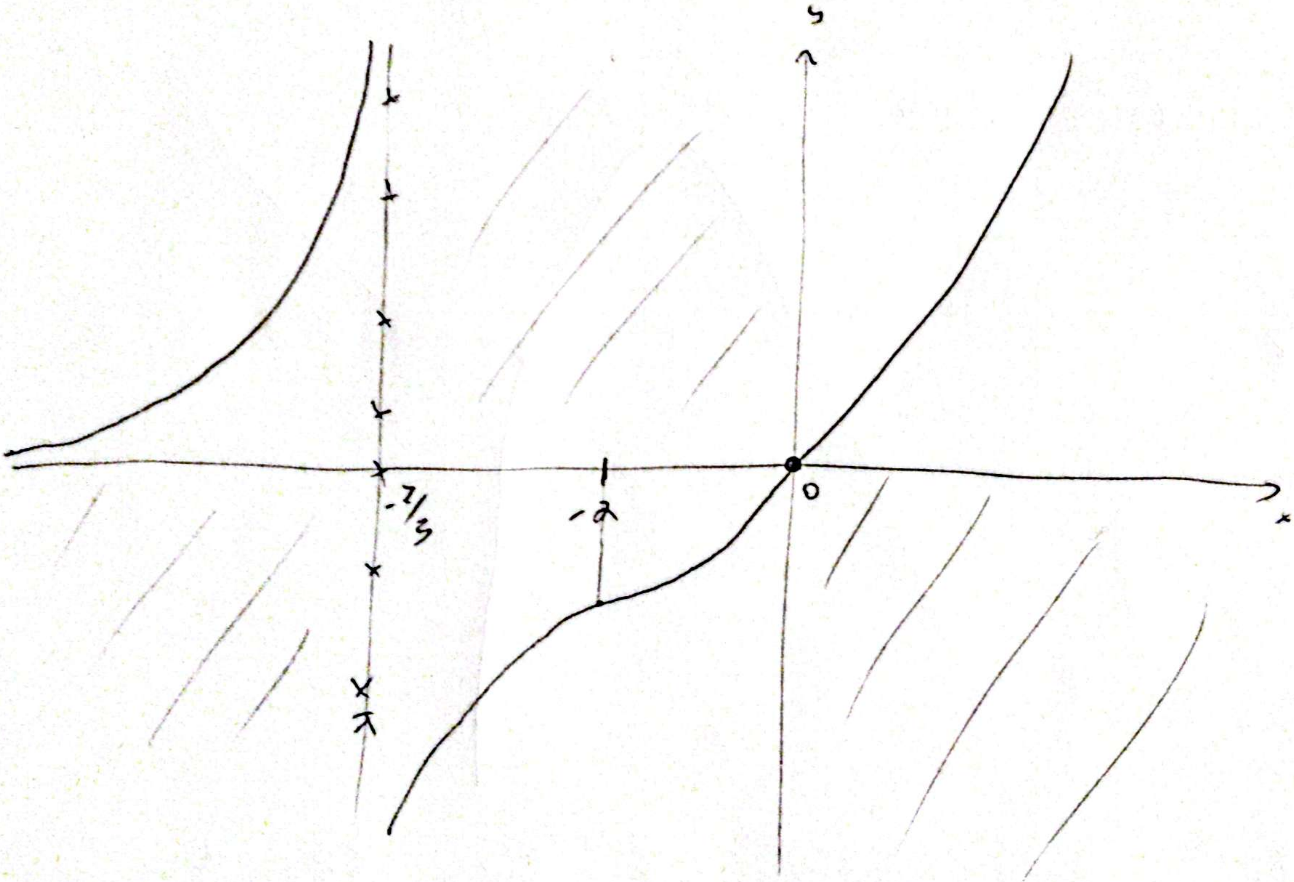
con $0<\alpha<5/12$ t.c. $36(-\alpha)^3+48(-\alpha)^2+40(-\alpha)+4=0$

Allora $f''(x) \geq 0 \iff x < -2/3 \ \vee\ x \geq -\alpha$



$x = -2$ è un FLESSO OBLIQUO

Per concludere:



Esercizio 1

(V) $f(x) = \ln^2(|2x|)$

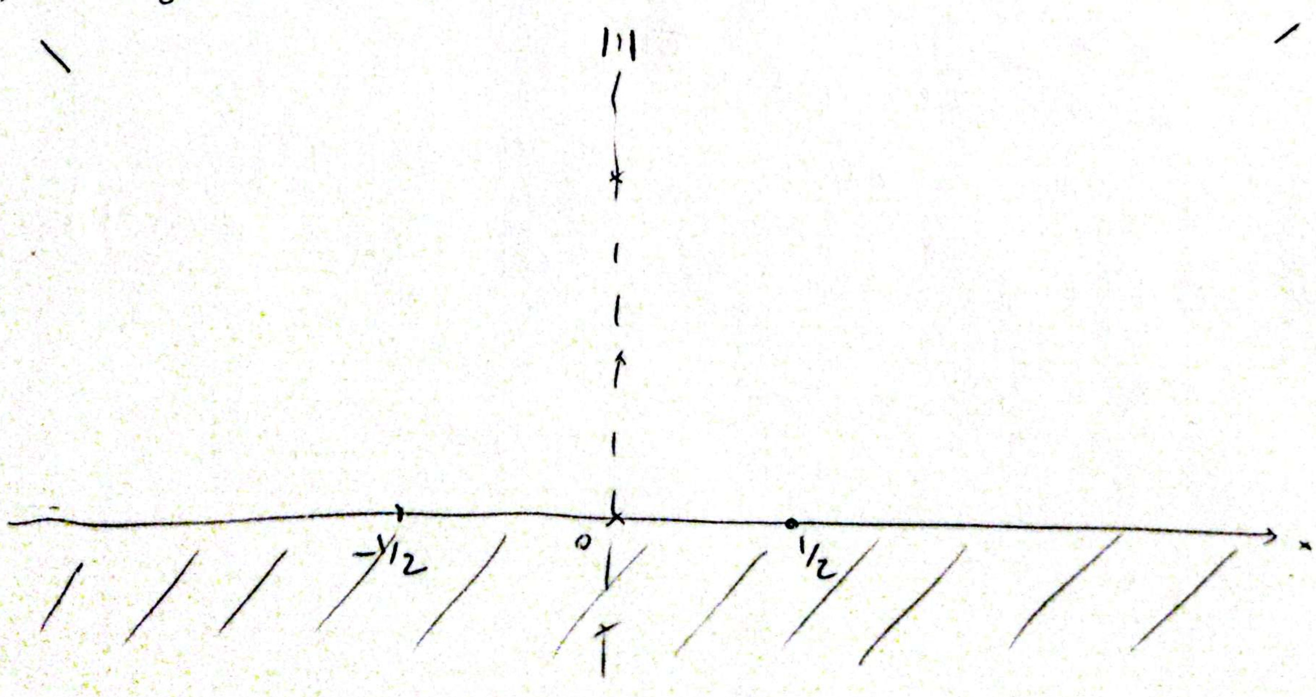
1) Dominio: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

2) INTERSEZIONE ASSI E SEGNO :

$$\begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln^2(|2x|) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1/2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$$

Segno: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \neq 0$ poiché è un quadrato.

Ora, prima di proseguire noto che $f(x)$ è PARI (ovvero $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in$ Dominio) da cui ne segue che mi basta studiare come si comporta per $x > 0$ e poi disegnarla riflessa rispetto all'asse y per $x < 0$.



ASINTOTI:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \ \left(\overset{\text{PARI}}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \right)$$

Quindi non ci sono né asintoti orizzontali, né verticali.

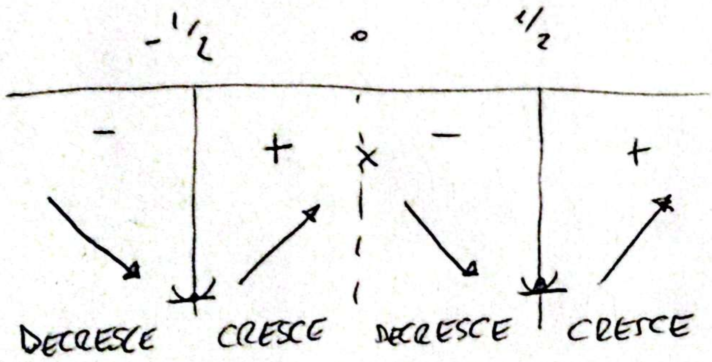
Poiché $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = m \Rightarrow q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - \cancel{mx} \right] = +\infty$

NO Asintoto obliquo a $+\infty$.

4) Monotonia di $f(x)$: Per $x > 0$ la derivata è:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln(2x) \geq 0 \iff x \geq +1/2$$

(e quindi per $x < 0$ $\ f'(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$)

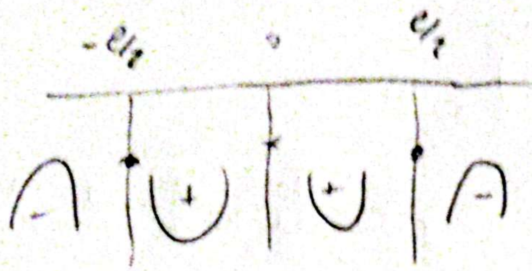


- $x = \pm 1/2$ MAX ASSOLUTI, NO MIN, NO FLESSI ORIZZONTALI

5) CONVESSITA' di $f(x)$: Per $x > 0$ $\quad f''(x) = \frac{2}{x^2}\left(1 - \ln(2x)\right) \geq 0$

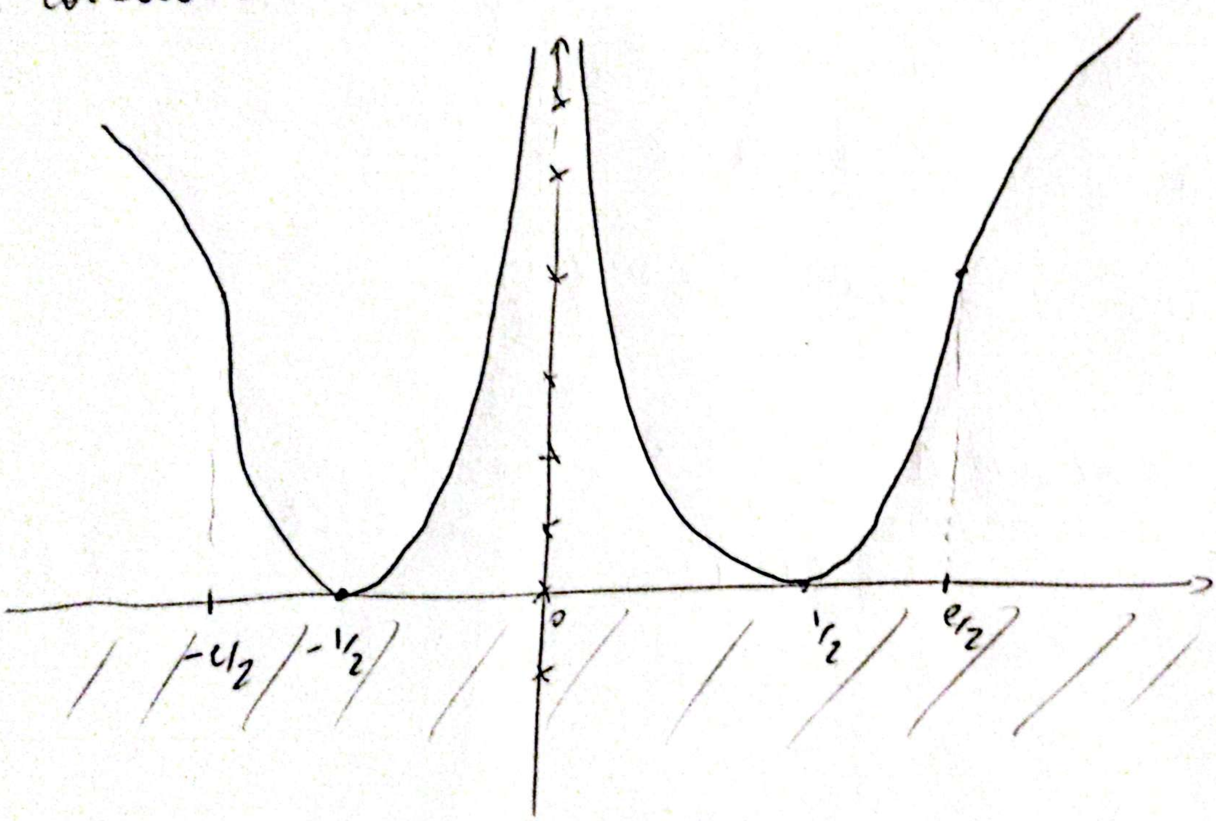
$\iff 0 < x \leq e/2$

(e quindi per $x < 0$ $\quad f''(x) \geq 0 \iff -e/2 \leq x < 0$)



$x = \pm e/_2$ sono FLESSI OBLIQUI

Per concludere:



ESERCIZIO 1

(VI) $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

1) Dominio $\{x \in \mathbb{R}\}$

2) Intersezioni ASSI E SEGNO:

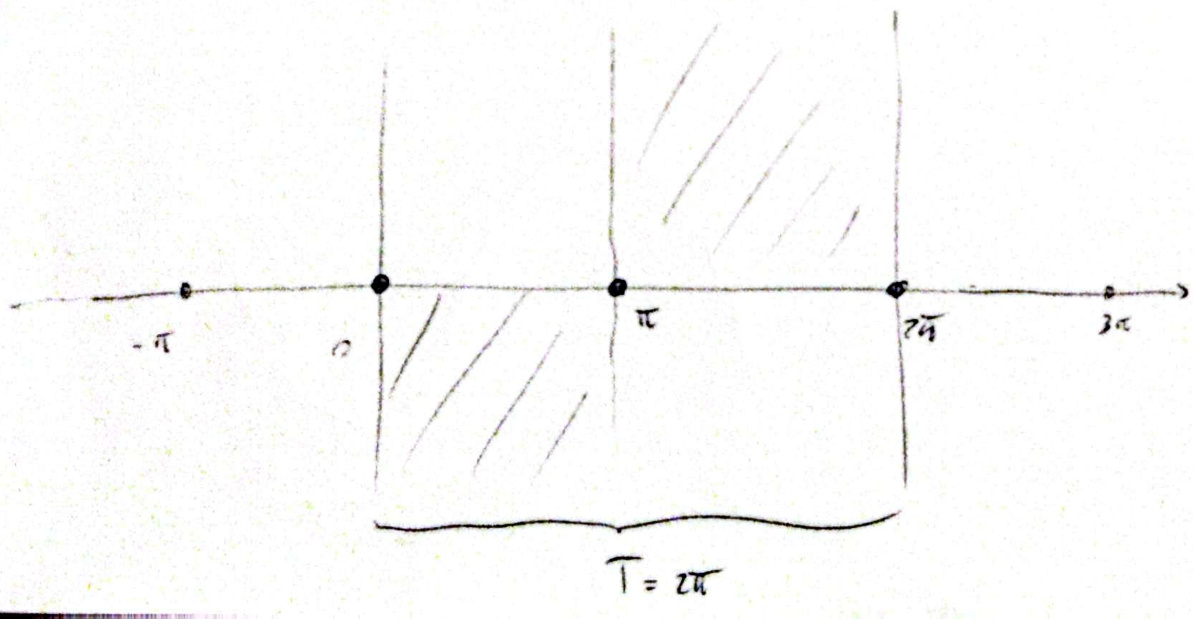
$$\begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$P = (k\pi, 0),\ k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} f(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad P = (0,0)$$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$

Inoltre noto che $f(x+2\pi) = f(x)$ cioè è PERIODICA di periodo $T = 2\pi$, quindi mi posso restringere a studiare la funzione fra $0 \leq x \leq 2\pi$.

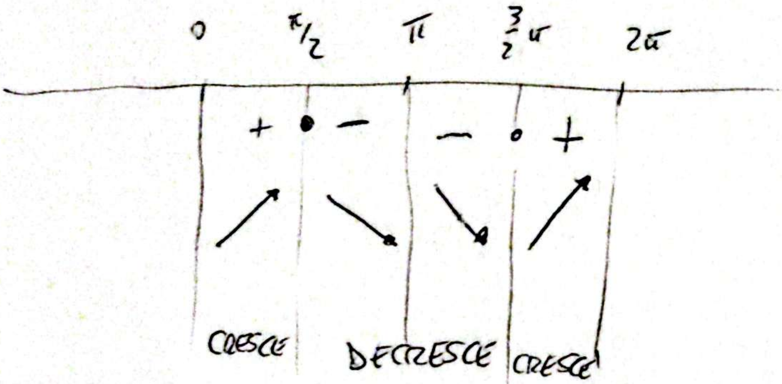


3) <u>Asintoti</u>: LA FUNZIONE OSCILLA e i LIMITI

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ <u>non</u> esistono. Analogamente per gli OBLIQUI

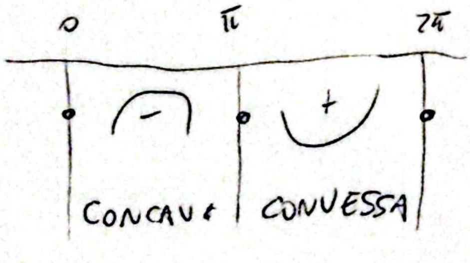
4) <u>Monotonia di $f(x)$</u>: $f'(x) = \cos x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$



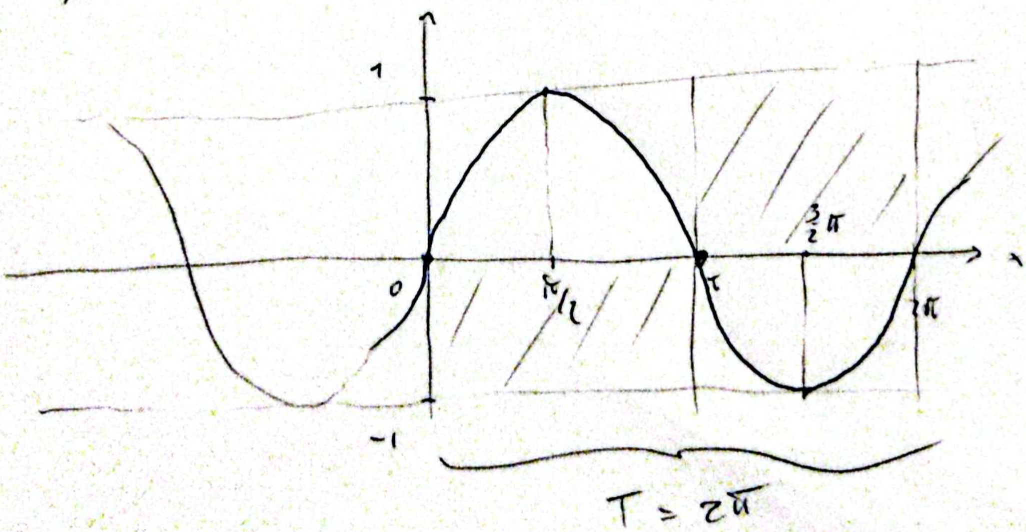
- $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di <u>MAX globale</u>.
- $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di <u>MIN</u> globale

5) $f''(x) = -\sin x \geq 0 \iff \pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



- $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di FLESSO OBLIQUO

<u>Per concludere</u>



Esercizio 1

(VII) $f(x) = \dfrac{x \ln(5x)}{2 - 3\ln(x)}$

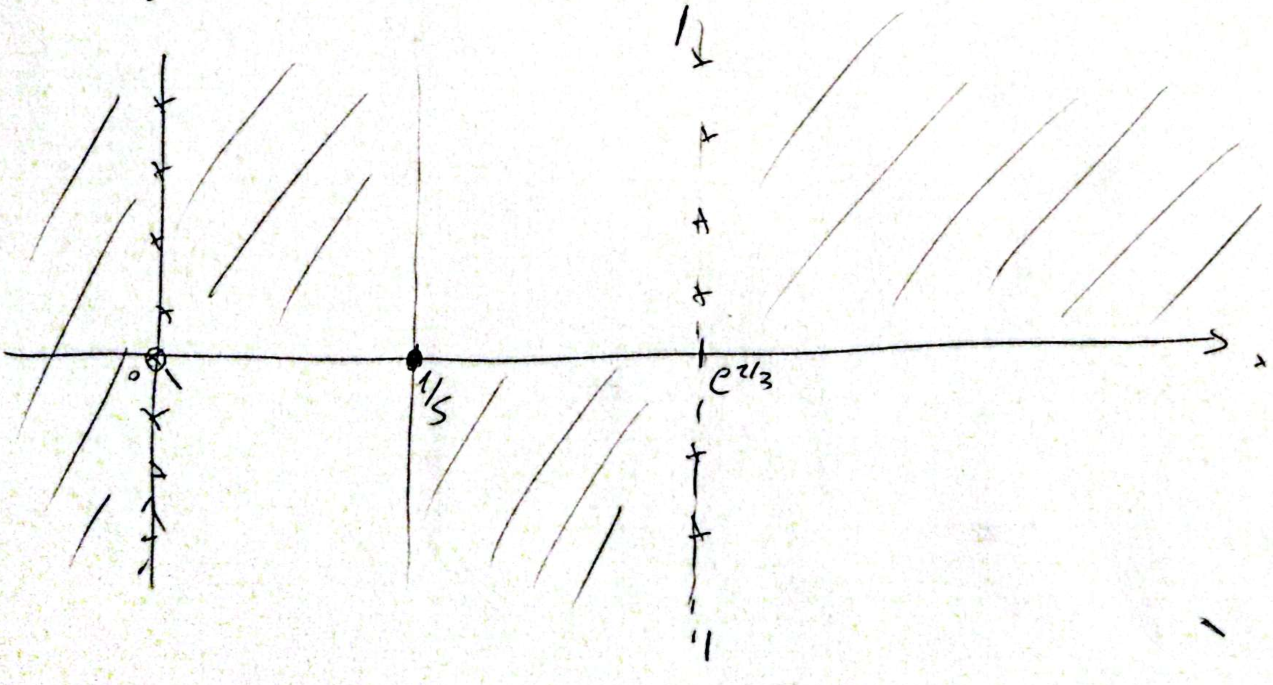
1) Dominio : $\begin{cases} x > 0 \\ 2 - 3\ln x \neq 0 \end{cases} \iff \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ con } x \neq e^{2/3}\}$

2) Intersezioni con ASSI e SEGNO :

$\begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (1/5, 0)$ o $\cancel{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}}$ NON ACCETTABILE

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln(5x)}{2 - 3\ln(x)} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{non nel dominio} \\ x = 0 \end{cases}$ non c'è intersezione per $x = 0$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff \frac{1}{5} \leq x < e^{2/3}$



Asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x\to e^{\frac{2}{3}^-}} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to e^{\frac{2}{3}^+}} f(x) = -\infty$$

Quindi: $x = e^{2/3}$ AS. VERTICALE

Asintoto obliquo:
$$\begin{cases} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1/3 \\ q = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) + \frac{1}{3}x \right] = +\infty \end{cases}$$

NO AS. obliquo a $+\infty$.

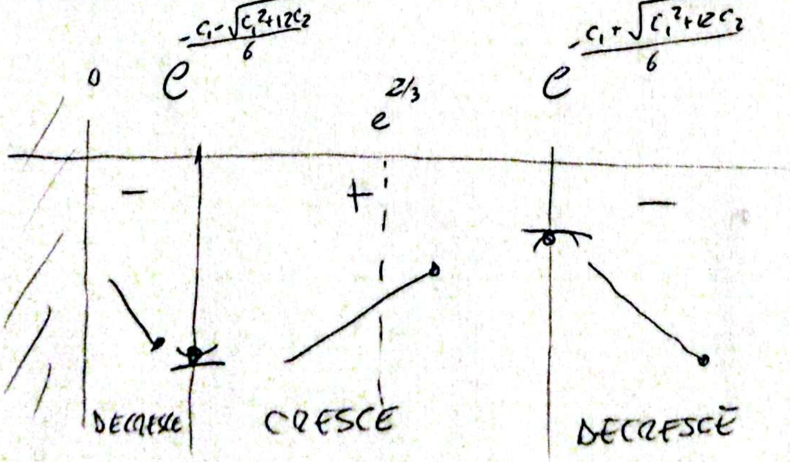
Monotonia di f(x):
$$f'(x) = -\frac{3\ln^2 x + [3\ln 5 - 2]\ln x - (5\ln 5 + 2)}{(2 - 3\ln x)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff 3\ln^2 x + [\underbrace{3\ln 5 - 2}_{c_1}]\ln x - (\underbrace{5\ln 5 + 2}_{c_2}) \leq 0$$

chiamo $t = \ln x$ e risolvo sostituendo:

$$f'(x) \geq 0 \iff e^{\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 + 12c_2}}{6}} \leq x \leq e^{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 + 12c_2}}{6}}$$

$$\begin{cases} c_1 := 3\ln 5 - 2 \\ c_2 := 5\ln 5 + 2 \end{cases}$$

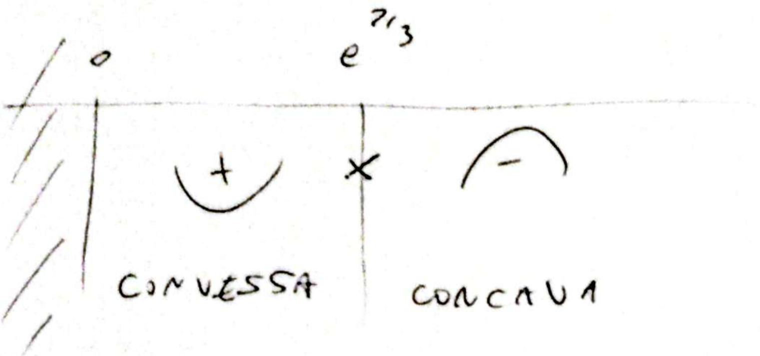


- $x = e^{\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2+12c_2}}{6}}$ è pt. di MIN relativo; NO FLESSI ORIZZONTALI
- $x = e^{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2+12c_2}}{6}}$ è pt. di MAX relativo

Convessità: $f''(x) = -\dfrac{a\ln^3 x + b\ln^2 x + c\ln x + d}{(2-3\ln x)^4}$

con $a = 27c_1 - 108$, $b = -54(c_2+c_1)$; $c = 72c_2 + 12c_1 + 48$; $d = 8c_1 - 24c_2$

$f''(x) \geq 0 \iff 0 < x < e^{2/3}$



No flessi obliqui

Per concludere: