Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 5

Esercizio 1. (i) Gli sviluppi di Taylor vicino al punto 0 sono:

$$(\sin x)^2 = \left(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \tfrac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\ln(x^2+1) = x^2 - \tfrac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$1-\cos(x) = 1 - (1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \ln(x^2+1)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - x^2 - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{10}{24}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4[-\frac{10}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}]}{x^2[\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}]} = 0$

(iii) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$

Gli sviluppi di Taylor attorno a 0 sono:

$$1-\cos(x) = 1 - (1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)) = \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln\left(\tfrac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x}\right) = \ln\left(1 - \tfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\tfrac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Quindi per continuità della funzione $e^{f(x)}$ mi basta calcolare il limite in 0 di $f(x) = \frac{1}{1-\cos x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = -\frac{1}{3}$.

Quindi: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{-\frac{1}{3}}$

(iii) Gli sviluppi di Taylor attorno a 0 sono:

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \tfrac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{\sin x - x} = e^{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1 - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Quindi, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x - x}-1}{\sin x - \tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)} = \frac{1}{3}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{x^3+2x-3}\left[1-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right] \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{t^{-4}-1}{t^{-3}+2t^{-1}-3}\left[1-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right]$

Ora sviluppo attorno a $t=0$ il $\cos\left(\frac{\pi}{5}+t\right)$:

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{5}+t\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{5}+t\right)_{|t=0} + \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{5}+t\right)\right)'_{|t=0} t + o(t) = \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{5}\right) - \left(\sin\tfrac{\pi}{5}\right)t + o(t)$$

Quindi: $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^{-4}-1}{t^{-3}+2t^{-1}-3}\left[1-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{t^{-4}-1}{t^{-3}+2t^{-1}-3}\left[1-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)t+o(t)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{t^{-4}-1}{t^{-3}+2t^{-1}-3}\left[\left(\tan\frac{\pi}{5}\right)t+o(t)\right] = \frac{(1-t^4)t^3\left(\tan\frac{\pi}{5}\right)t}{t^4(1+2t^2-3t^3)} = \left(\tan\frac{\pi}{5}\right)\frac{1-0^4}{1+2\cdot 0^2-3\cdot 0^3} = \tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{\varphi}$

Curiosità: $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\varphi}{2}$, dove φ è il numero aureo. Provate a dimostrarlo.

(vii) Sviluppo attorno a 0 fino ad avere un $o(x^4)$, poiché al denominatore ho x^4:

$$\sin\left(e^x-1\right) = \sin\left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right) = \\ \left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right) - \tfrac{1}{6}\left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^3 + \\ o\left(\left(x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^3\right) = \\ x+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{6}+\tfrac{x^4}{24}-\tfrac{1}{6}\left(x^3+\tfrac{3}{2}x^4\right)+o(x^4) = x+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{5}{24}x^4+o(x^4)$$

Quindi: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)-x-\frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2}-\frac{5}{24}x^4+o(x^4)-x-\frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{24}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{5}{24}$

Esercizio 2.

(ii) Sviluppo con Taylor vicino al punto $x=\frac{\pi}{4}$ fermandomi al secondo ordine: $\tan x - 1 = (\tan x-1)_{|x=\frac{\pi}{4}} + (\tan x - 1)'_{|x=\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2!}(\tan x-1)''_{|x=\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{4})^2 + o((x-\frac{\pi}{4})^2) = 0 + 2(x-\frac{\pi}{4}) + 2(x-\frac{\pi}{4})^2 + o((x-\frac{\pi}{4})^2) = 2x^2+(2-\pi)x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}+o((x-\frac{\pi}{4})^2)$

Quindi $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2x^2+(2-\pi)x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}} = 1.$

Allora: $\tan x - 1 \overset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} 2x^2+(2-\pi)x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}$

Esercizio 3. Per trovare un polinomio di grado 3 per cui $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{p(x)} = 1$ mi basta espandere attorno a 0 con Taylor la funzione:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Preso per esempio $p(x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, ho trovato un possibile polinomio di grado 3 che risolve il limite richiesto: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} = 1$

Ovviamente ogni qualsiasi polinomio della forma $x+ax^2+bx^3$ con $a,b\in\mathbb{R}$ andrebbe bene perché ax^2+bx^3 sono $o(x)$

Esercizio 4. Espando attorno a 0 con Taylor fino al secondo ordine la funzione:

$$g(x) = e^x - \ln(1+\sin x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2}+o(\sin^3 x)) = \\ 1+x+\frac{x^2}{2}-(x-\frac{x^2}{2})+o(x^2) = 1+x^2+o(x^2).$$

Adesso espando:

$$f(x) = \sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2} = \sqrt{a}(1+\frac{b}{2a}x+\frac{c}{2a}x^2-\frac{b}{8a}x^2+o(x^2))$$

Basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 1 \\ \frac{b}{2\sqrt{a}} = 0 \\ \frac{c}{2\sqrt{a}} - \frac{b}{8\sqrt{a}} = 1 \end{cases}$$

che da come soluzione: $a=1, b=0, c=2$; quindi $f(x)=\sqrt{1+2x^2}$

Esercizio 5. Basta usare gli sviluppi di Taylor attorno all'origine:

$e = e^1 = 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + ... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ...$

$\pi = 4 \arctan 1 = 4(1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + ...) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + ...$

Per ϕ mi basta notare che $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + ...$ con $x = \frac{1}{4}$ (posso prendere solo gli $x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x| < 1$); nel nostro caso: $\sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1^2}{128} + ...$

Allora: $\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + ...$