Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Side Materials

$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ... + (-1)^n f_{n+1} = (-1)^n f_n + 1$ per ogni $n \geq 1$

$f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + ... + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$ per ogni $n \geq 1$

(vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$ (Somma geometrica)

(i) Supponiamo $n = 1$: allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$; d'altro canto $\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 1$.
Ora $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n + \sum_{k=1}^{n-1} k$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$, quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n+(n-1)n}{2} = \frac{(2+n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(ii) Supponiamo $n = 1$: allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

Ora $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, quindi $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n^2 + 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6n^2 + 12n + 6 + n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(vii) $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$, supponiamo $n = 0$: allora $\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$. D'altronde $\frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$. Ora, $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k$; per ipotesi induttiva $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} + \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{(1-x)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1-x}$.

(i) Sia x un numero reale maggiore di 0. Supponiamo $n = 2$: allora $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$, ed essendo x^2 una quantità positiva abbiamo $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Ora $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1}$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $(1+x)^{n-1} > 1 + (n-1)x = 1 + nx - x$, quindi (osservando che $(1+x)$ è una quantità positiva poiché $x > 0$) abbiamo $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} > (1+x)(1+nx-x) = 1+nx-x+x+nx^2-x^2 = 1 + nx + (n-1)x^2$, ed essendo $(n-1)x^2$ una quantità positiva abbiamo $(1+x)^n > 1 + nx + (n-1)x^2 > 1 + nx$. Grazie al principio di induzione concludiamo che la disequazione di partenza è valida per ogni $n \geq 2$.

(iii) Supponiamo $n = 1$: allora $1! = 1$; d'altro canto $2^{1-1} = 2^0 = 1$, e ovviamente $1 \geq 1$. Vogliamo verificare che $(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1} = 2^n$. Ora $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $n! \geq 2^{n-1}$, quindi $(n+1)! = n! \cdot (n+1) \geq 2^{n-1} \cdot (n+1)$, ma $n + 1 \geq 2$ essendo $n \geq 1$, quindi $(n+1)! \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$. Grazie al principio di induzione concludiamo che la disequazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(v) Suppongo $n = 3$. Il numero di diagonali di un triangolo (escludendo ovviamente i lati stessi) è 0. D'altronde $\frac{3(3-3)}{2} = 0$. Per ipotesi induttiva so che la formula vale fino ad ogni poligono convesso con n lati. Se considero il poligono con $n+1$ questo significa che sto aggiungendo al poligono con n lati altri due lati dal nuovo vertice a due vertici a caso del $n-$poligono. Questo significa che il numero di diagonali dell'$(n+1)-$poligono sarà uguale a $\frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1$, poichè corrisponderà al numero di diagonali del poligono precedente più $(n-2)$ da levare al precedente che verranno contate come i nuovi lati. Inoltre bisognerà aggiungere una diagonale nuova corrispondente al lato dell'$n-$poligono precedentemente cancellata nel conteggio dell'$n-$poligono. Per concludere, $\frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 = \frac{n(n-3)+2(n-2)+2}{2} = \frac{n^2-3n+2n-4+2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

(vi) Per $n = 3$ è vero, infatti la somma interna degli angoli di un triangolo è π radianti (180 gradi). Per ipotesi induttiva considero la formula vera fino ad un poligono convesso con n lati. Un poligono convesso con $(n+1)-$lati è ottenuto dal precedente aggiungendo un triangolo. Ma allora il numero di gradi del nuovo poligono convesso sarà quella del precedente più quella del nuovo triangolo aggiunto: $(n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi$

Esercizio 1 (Il numero di Nepero come punto fisso)**.** Data la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{\lambda^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con λ un numero reale, e definito l'operatore

$$\Delta_h[a_n] := \frac{a_{n+h} - a_n}{h}$$

allora è facile verificare che cercare per quale λ, $\Delta_h[\lambda^n] = \lambda^n$ equivale a calcolare $\lambda^h = (h+1) \Leftrightarrow \lambda = (1+h)^h$.
Quanto vale il limite per $h \to 0$? Quanto è il valore di λ? a_n che successione è?

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{e^{2x+4}-1}{x+2}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1-e^{2x}}{\sin(3x)}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(3x)-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1-4x)}{x}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}$

(viii) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\log(3+3x)}$

(xii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(xiii) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(1+e^{\frac{1}{x^3}}\right)^{\sin x}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n^5}\right)}{2\log\left(n^6+n^2\right)}$

(xii) $\lim_{n\to\infty} n^2(2e^{\frac{\ln n}{n}}-2)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+1}$

(viii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}\left(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

Esercizio 2 (Costante di Eulero-Mascheroni)**.**

Definita la successione

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste ed è un numero finito compreso tra 0 e 1, procedendo per passi.

Passo 1: Verificare che la successione è monotona decrescente: $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq 1$.

(Suggerimento: usare che $\ln(\alpha+1) \leq \alpha$ per ogni $\alpha \geq -1$)

Passo 2: Verificare che la successione è limitata dal basso e dall'alto, più in dettaglio: $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$.

Passo 3: Il teorema di convergenza delle successioni monotone afferma quanto segue:

Theorem 1. Se una successione di numeri reali è monotona crescente e limitata superiormente, allora è convergente e il suo estremo superiore è il suo limite.

Utilizzare il teorema di convergenza delle successioni monotone per dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$$

dove γ è una numero reale compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1, chiamato costante di Eulero-Mascheroni.

Calcolare il seguenti integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^9 e^{-x^4}}{1+x^6}\, dx$$

(i) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$

(ii) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^4}dt$

(iii) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$

(xxvi) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}dx$

(xxvii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\sqrt{x^2+x}\, dx$

(xxviii) $\displaystyle\int (5-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}\, dx$

Applichiamo la sostituzione $y = \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{x^3}{x+1}}-x\right)\ln x}{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)+\sqrt{x}\ln^2 x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{y^3\left(\frac{1}{y}+1\right)}}-\dfrac{1}{y}\right)(-\ln y)}{\dfrac{1}{y}\left(\left(\dfrac{1}{y}\right)^{y}-1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{y}}(-\ln y)^2} =$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y+1}}-1\right)(-y\ln y)}{\left(e^{-y\ln y}-1\right)+\sqrt{y}\ln^2 y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y+1}}-1}{\dfrac{e^{-y\ln y}-1}{-y\ln y}-\dfrac{\ln y}{\sqrt{y}}} = \frac{1-1}{1+\infty} = 0$$