Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 8

Esercizio 1.

(iv) Utilizzo la sostituzione di Eulero:

$$x^2 + 4x - 4 = (x+t)^2$$

Da cui ne segue che:

$$x = \frac{t^2+4}{4-2t} \quad dx = \frac{-2t^2+8t+8}{(4-2t)^2}dt$$

Da cui segue sostituendo che:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+4}{4-2t}(\frac{t^2+4}{4-2t}+t)} \frac{-2t^2+8t+8}{(4-2t)^2}dt = \int \frac{2(-t^2+4t+4)}{(t^2+4)(4+4t-t^2)}dt =$$
$$2\int \frac{1}{t^2+4}dt = \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \arctan\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}\right) + c$$

(v) Utilizzo la sostituzione di Eulero:

$$x^2 + x = (x+t)^2$$

Da cui segue che:

$$x = \frac{t^2}{1-2t} \quad dx = \frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}dt$$

Da cui segue sostituendo che:

$$\int \frac{x+1}{x}\sqrt{x^2+x}dx = \int \frac{t^2+1-2t}{t^2}\left(\frac{t^2}{1-2t}+t\right)\frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}dt = \int \frac{2(t^2+1-2t)(1-t)(t-t^2)}{t(1-2t)^3}dt = \int \frac{2t^4-8t^3+12t^2-8t+2}{(1-2t)^3}\,dt$$

Ora utilizzando prima la divisione polinomiale e successivamente i fratti semplici ottengo:

$$\int \frac{2t^4-8t^3+12t^2-8t+2}{(1-2t)^3}\,dt = \frac{-2t^4+12t^3-15t^2+5t}{4(4t^2-4t+1)} - \frac{3}{8}\ln|2t-1| + c$$

Ed ora sostituendo $t = -x + \sqrt{x^2+x}$ risolvo l'integrale:

$$\frac{-2(-x+\sqrt{x^2+x})^4+12(-x+\sqrt{x^2+x})^3-15(-x+\sqrt{x^2+x})^2+5(-x+\sqrt{x^2+x})}{4(4(-x+\sqrt{x^2+x})^2-4(-x+\sqrt{x^2+x})+1)} - \frac{3}{8}\ln|2(-x+\sqrt{x^2+x})-1| + c$$

(vi) Ora noto che il segno del coefficiente di x^2 è negativo, quindi posso usare la sostituzione tramite il seno. Prima ricostruisco il quadrato:

$$5-x^2-x = -(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{21}{4}$$

Da cui se ne deduce l'immediata sostituzione:

$$x+\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}\sin t$$

Quindi:

$$dx = \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt$$

Allora $\int (5-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx = \int \left(\frac{21}{4}\cos^2 t\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt = \int \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{21}{4}}\cos t}\right)^3 \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt = \frac{4}{21}\int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \frac{4}{21}\tan t + c = \frac{4}{21}\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + c$

(vii) Anche in questo caso il termine davanti a x^2 ha segno negativo, quindi utilizzo la seguente sostituzione:

$$x = a\sin t \quad dx = a\cos t dt$$

Quindi, dove $a \in \mathbb{R}$, allora: $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \int \frac{|a|\cos t}{a\sin t}a\cos t dt = |a|\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = |a|\int \frac{1}{\sin t}\,dt - |a|\int \sin t\,dt = |a|\int \frac{1}{\sin t}\,dt + |a|\cos t + c$

Ma l'integrale $\int \frac{1}{\sin t}\,dt$ si risolve con la solita sostituzione

$z = \tan\frac{t}{2}$

Da cui segue immediatamente che: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\, dt = \ln\left(\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) + c$

E quindi: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = |a| \ln\left(\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) + |a|\cos t + c = |a| \ln\left(\left|\tan\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}\right|\right) +$ $\displaystyle|a|\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c = |a| \ln\left|\left(\frac{\frac{x}{a}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}\right)\right| + |a|\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + c$

(i)

1

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{\frac{8-T^2}{2T+4}+T}\cdot\left(-\frac{T^2+4T+8}{2(T+2)^2}\right)dT =$$

$$\sqrt{x^2-4x+8} = x+T$$

$$x = \frac{8-T^2}{2T+4}$$

$$dx = -\frac{T^2+4T+8}{2(T+2)^2}\,dT$$

$$= -\int \frac{2(T+2)}{8-T^2+2T^2+4T}\cdot\frac{T^2+4T+8}{2(T+2)^2}\,dT =$$

$$= -\int \frac{1}{T+2}\,dT = -\ln|T+2| + C =$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4x+8} - x + 2\right| + C$$

(ii)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sin T}{\sqrt{1-\sin^2 T}} \cos T \, dT =$$

$x = \sin T$

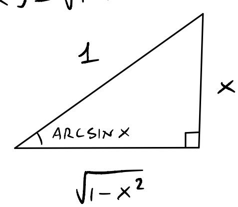
$dx = \cos T \, dT$

$T = \arcsin x$

$$= \int \sin T \, dT = -\cos T + C =$$

$$= -\cos(\arcsin x) + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$



ALTERNATIVAMENTE

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)\cdot(1-x^2)^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

(iii)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx = -2\int \frac{1}{\frac{2-T^2}{2T+3}+T} \cdot \frac{T^2+3T+2}{(2T+3)^2}\,dT =$$

$$\sqrt{x^2-3x+2} = x+T$$

$$x = \frac{2-T^2}{2T+3}$$

$$dx = -2\,\frac{T^2+3T+2}{(2T+3)^2}\,dT$$

$$= -2\int \frac{2T+3}{2-T^2+2T^2+3T} \cdot \frac{T^2+3T+2}{(2T+3)^2}\,dT =$$

$$= -2\int \frac{1}{2T+3}\,dT = -2\ln|2T+3| + c =$$

$$= -2\ln\left|\sqrt{x^2-3x+2} - x\right| + c$$

(viii) 4

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{\frac{2T}{1+T^2}}{\frac{2T}{1+T^2} + \frac{1-T^2}{1+T^2}} \cdot \frac{2}{1+T^2}\,dT =$$

$T = \tan(x/2)$

$\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$

$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$

$dx = \frac{2}{1+T^2}\,dT$

$$= \int \frac{2T}{2T+1-T^2} \cdot \frac{2}{1+T^2}\,dT = -4\int \frac{T}{(T^2-2T-1)(T^2+1)}\,dT = *$$

$$\frac{T}{(T^2-2T-1)(T^2+1)} = \frac{AT+B}{(T^2-2T-1)} + \frac{CT+D}{(T^2+1)} =$$

$$= \frac{AT^3+BT^2+AT+B+CT^3+DT^2-2CT^2-2DT-CT-D}{(T^2-2T-1)(T^2+1)}$$

$$\to \begin{cases} A+C=0 \\ B+D-2C=0 \\ A-2D-C=1 \\ B-D=0 \end{cases} \to \begin{cases} A=-C \\ 2D=2C \\ A-2C-C=1 \\ B=D \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} A=-C \\ D=C \\ A-3C=1 \\ B=D \end{cases} \to \begin{cases} A=1/4 \\ B=-1/4 \\ C=-1/4 \\ D=-1/4 \end{cases}$$

$$* = -4\int\left(\frac{1}{4}\,\frac{T-1}{T^2-2T-1} - \frac{1}{4}\,\frac{T+1}{T^2+1}\right)dT =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{2T-2}{T^2-2T-1} - \frac{2T+2}{T^2+1}\right)dT =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|T^2-2T-1| + \frac{1}{2}\int\frac{2T}{T^2+1}\,dT + \int\frac{1}{T^2+1}\,dT =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|T^2-2T-1| + \frac{1}{2}\ln(T^2+1) + \text{ARCTAN}(T) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{T^2+1}{T^2-2T-1}\right| + \text{ARCTAN}(T) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\text{TAN}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\text{TAN}^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\,\text{TAN}\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + \frac{x}{2} + C$$

(ix)

$$\int \frac{\tan x}{\sin x + \tan x}\,dx = \int \frac{\frac{2T}{1-T^2}}{\frac{2T}{1+T^2} + \frac{2T}{1-T^2}} \frac{2}{1+T^2}\,dT =$$

$T = \tan(x/2)$

$\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$

$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$

$dx = \frac{2}{1+T^2}\,dT$

$$= \int \frac{4T}{2T(1-T^2) + 2T(1+T^2)}\,dT =$$

$$= 2\int \frac{1}{1-T^2+1+T^2}\,dT = \int dT =$$

$$= T + C = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$