Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Tutorato 9

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali definiti.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{4e^{2x}+4e^x+1}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8+4\sin x+7\cos x}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int_{e^e}^{e^{e^2}} \frac{1}{x\,(\ln x)\left(\ln^3(\ln x)\right)}\,dx$

(v) $\displaystyle\int_0^3 |x^2-3x+1|\,dx$

(vi) $\displaystyle\int_{-n}^{n} \{x\}\,dx$ con $n\in\mathbb{Z}$

(vii) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx$ con $n,m\in\mathbb{Z}$

Esercizio 2. Sia $f(x)$ una funzione integrabile su $\mathbb{R}$ e sia $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Dimostrare le seguenti affermazioni.

(i) Se $f(x)$ è pari (risp. dispari), allora $F(x)$ è dispari (risp. pari)

(ii) Se $f(x)$ è periodica di periodo T e $\int_0^T f(t)\,dt = 0$, allora $F(x)$ è periodica di periodo T

(iii) Se $f(x)$ è dispari allora $\forall r \in \mathbb{R}$ vale $\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 0$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy.

(i) $\begin{cases} \dot{x} + x = \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \dot{x} = 3te^{t^2}x \\ x(0) = \sqrt{e^3} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \dot{x} = 2t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} \dot{x} = (\tan t)x + \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} 10\dot{x} - 2tx = t^3 \\ x(0) = -5 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = e^t \\ x(0) = -\dfrac{1}{4} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} \ddot{x} + 9 = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} \ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = te^{3t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} 2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin(2t) + t \\ x(0) = -13 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$