ESERCIZIO 1

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4e^{2x}+4e^x+1}\,dx = \int_1^e \frac{T^2}{4T^2+4T+1}\,\frac{dT}{T} = \int_1^e \frac{T}{4T^2+4T+1}\,dT =$$

$e^x = T$

$e^x\,dx = dT$

$dx = \frac{dT}{T}$

$x = 0 \longrightarrow T = 1$

$x = 1 \longrightarrow T = e$

$$= \frac{1}{8}\int_1^e \frac{8T}{4T^2+4T+1}\,dT = \frac{1}{8}\int_1^e \frac{8T+4-4}{4T^2+4T+1}\,dT =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^e \frac{8T+4}{4T^2+4T+1}\,dT + \frac{1}{8}\int_1^e \frac{-4}{4T^2+4T+1}\,dT =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\log(4T^2+4T+1)\Big]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e \frac{2}{(2T+1)^2}\,dT =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\log(2T+1)^2\Big]_1^e - \frac{1}{4}\left[\frac{(2T+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\log(2T+1)\Big]_1^e + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2T+1}\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log(2T+1) + \frac{1}{2T+1}\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log(2e+1) + \frac{1}{2e+1} - \log(3) - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \log\sqrt[4]{\frac{2e+1}{3}} - \frac{e-1}{12e+6}$$

(ii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$

CALCOLIAMO PRIMA L'INTEGRALE INDEFINITO

$$\int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \int (x\cos x - \sin x)\cdot x^{-2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER PARTI}}}{=}$$

$$= (x\cos x - \sin x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) - \int (\cos x - x\sin x - \cos x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x - \int \sin x\,dx = \frac{\sin x}{x} - 2\cos x + c$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x} - 2\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sin(\pi)}{\pi} - 2\cos(\pi) - \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} - 2\cos(\pi/2) = 2 - \frac{2}{\pi}$$

(iv) $\displaystyle\int_{e^e}^{e^{e^2}} \frac{1}{x(\ln x)(\ln^3(\ln x))}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{T(\ln T)^3}\,dT =$

$\ln x = T$

$\frac{dx}{x} = dT$

$x = e^e \rightarrow T = e$

$x = e^{e^2} \rightarrow T = e^2$

$$= \int_e^{e^2} \frac{1}{T}(\ln T)^{-3}\,dT = \left[\frac{(\ln T)^{-2}}{-2}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(\ln T)^2}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right] = \frac{1}{4}$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8+4\sin x+7\cos x}\,dx$

CALCOLIAMO PRIMA L'INTEGRALE INDEFINITO

$$\int \frac{1}{8+4\sin x+7\cos x}\,dx = \int \frac{1}{8+\frac{8T}{1+T^2}+7\frac{1-T^2}{1+T^2}}\,\frac{2}{1+T^2}\,dT =$$

$T = \tan(x/2)$

$\cos x = \frac{1-T^2}{1+T^2}$

$\sin x = \frac{2T}{1+T^2}$

$dx = \frac{2}{1+T^2}\,dT$

$$= 2\int \frac{1}{8+8T^2+8T+7-7T^2}\,dT = 2\int \frac{1}{T^2+8T+15}\,dT =$$

$$= 2\int \frac{1}{(T+3)(T+5)}\,dT = *$$

$$\frac{1}{(T+3)(T+5)} = \frac{A}{T+3} + \frac{B}{T+5} = \frac{(A+B)T + (5A+3B)}{(T+3)(T+5)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 5A+3B=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

$$* = 2\int \frac{1/2}{T+3}\,dT - 2\int \frac{-1/2}{T+5}\,dT = \ln|T+3| + \ln|T+5| + c =$$

$$= \ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+5\right)\right| + c$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{8+4\sin x + 7\cos x}\,dx =$$

$$= \left[\ln\left|\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+5\right)\right|\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \ln(4\cdot 6) - \ln(3\cdot 5) = \ln(8/5)$$

(v) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 1|\, dx$

PONIAMO $x^2 - 3x + 1 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

ALLORA $x^2 - 3x + 1 \geq 0 \leftrightarrow x \leq \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \vee x \geq \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 1|\, dx = \int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} (x^2 - 3x + 1)\, dx + \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} -(x^2 - 3x + 1)\, dx + \int_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^{3} (x^2 - 3x + 1)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^{3} =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right)\Bigg|_{x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right)\Bigg|_{x = 3} +$$

$$- 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right)\Bigg|_{x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x \right)\Bigg|_{x = 0} =$$

$$= -\frac{3}{2} + 2\left\{ \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \right] - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} + 2\left\{ \left[\frac{1}{24}(3-\sqrt{5})^3 - \frac{3}{8}(3-\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \right] - \left[\frac{1}{24}(3+\sqrt{5})^3 - \frac{3}{8}(3+\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\left\{ \left[(3-\sqrt{5})^3 - 9(3-\sqrt{5})^2 + 12(3-\sqrt{5}) \right] - \left[(3+\sqrt{5})^3 - 9(3+\sqrt{5})^2 + 12(3+\sqrt{5}) \right] \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\left\{(3-\sqrt{5})\left[(3-\sqrt{5})^2 - 9(3-\sqrt{5}) + 12\right] - (3+\sqrt{5})\left[(3+\sqrt{5})^2 - 9(3+\sqrt{5}) + 12\right]\right\} =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\left\{(3-\sqrt{5})(3\sqrt{5}-1) - (3+\sqrt{5})(-3\sqrt{5}-1)\right\} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\sqrt{5}$$

ESERCIZIO 3

(i) $\begin{cases} \dot{x} + x = \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$$\dot{x} = -x + \frac{e^{-T}}{2\sqrt{T}}$$

$$a(T) = -1 \qquad b(T) = \frac{e^{-T}}{2\sqrt{T}}$$

$$A(T) = \int_0^T a(s)\,ds = -\int_0^T ds = -T$$

$$\int_0^T e^{-A(s)} b(s)\,ds = \int_0^T e^{s} \frac{e^{-s}}{2\sqrt{s}}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^T s^{-\frac{1}{2}}\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^T = \sqrt{T}$$

$$x(T) = e^{-T}\left(\sqrt{T} + 1\right)$$

(iv) $\begin{cases} \dot{x} = (\tan t)x + \cos t \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$$a(T) = \tan(T) \qquad b(T) = \cos(T)$$

$$A(T) = \int_0^T a(s)\,ds = \int_0^T \frac{\sin s}{\cos s}\,ds = -\int_0^T \frac{d}{ds}(\cos s)\,\frac{1}{\cos s}\,ds =$$

$$= -\left[\ln|\cos s|\right]_0^T = -\ln|\cos T|$$

COST È NON NEGATIVO IN UN INTORNO DI

T=0, SCEGLIAMO DUNQUE $A(T) = -\ln(\cos T)$

$$\int_0^T e^{-A(s)} b(s)\,ds = \int_0^T \cos^2 s\,ds = \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2s\right) ds =$$

$$= \left[\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}\sin 2s\right]_0^T = \frac{1}{2}T + \frac{1}{4}\sin 2T.$$

$$x(T) = e^{-\ln\cos T}\left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{4}\sin 2T\right) = \frac{T}{2\cos T} + \frac{\sin 2T}{4\cos T} =$$

$$= \frac{T}{2}\sec T + \frac{1}{2}\sin T$$

(iii) $\begin{cases} \dot{x} = 2t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$$\frac{dx}{dT} = 2T\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2T\,dT$$

INTEGRANDO AMBO I LATI OTTENIAMO

$$\text{ARCSEN}\, x = T^2 + c$$

$$T = 0 \longrightarrow x = 0$$

$$\text{ARCSEN}(0) = 0^2 + c \longrightarrow c = 0$$

$$\text{ARCSEN}\, x = T^2 \longrightarrow x(T) = \text{SIN}(T^2)$$

$$\text{(vi)} \quad \begin{cases} \ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = e^t \\ x(0) = -\dfrac{1}{4} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE OMOGENEA:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_0(T) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 T} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 T}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 2x = e^T$$

$$x_p(T) = A \cdot e^T$$

$$\dot{x}_p(T) = A \cdot e^T$$

$$\ddot{x}_p(T) = A \cdot e^T$$

$$A \cdot e^T - 3A \cdot e^T - 2A \cdot e^T = e^T \longrightarrow -4A = 1 \longrightarrow A = -\frac{1}{4}$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$x(T) = x_0(T) + x_p(T)$$

$$x(T) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 T} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 T} - \frac{1}{4} e^T$$

PROBLEMA DI CAUCHY:

$$x(T) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 T} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 T} - \frac{1}{4} e^T$$

$$\dot{x}(T) = c_1 \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 T} + c_2 \cdot \lambda_2 e^{\lambda_2 T} - \frac{1}{4} e^T$$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ \dot{x}(0) = c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 \sqrt{17} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4\sqrt{17}} \\ c_2 = -\frac{1}{4\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$x(T) = \frac{1}{4\sqrt{17}} e^{T \frac{3+\sqrt{17}}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{17}} e^{T \frac{3-\sqrt{17}}{2}} - \frac{1}{4} e^T$$

(vii) $\begin{cases} \ddot{x} + 9 = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$

$$\ddot{x} = -9$$

$$\dot{x} = -9T + C$$

$$x = -9\frac{T^2}{2} + CT + D$$

$$\begin{cases} x(0) = D = 1 \\ \dot{x}(0) = C = 1 \end{cases}$$

$$x(T) = -\frac{9}{2}T^2 + T + 1$$

(x) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin(2t) + t \\ x(0) = -13 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

SOLUZIONE OMOGENEA:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = -\frac{1}{2}, \ \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_0(T) = e^{\alpha T}\left(c_1 \cdot \cos\beta T + c_2 \cdot \sin\beta T\right)$$

$$X_0(T) = e^{-\frac{T}{2}}\left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right)$$

PRIMA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = \sin(2t)$$

$$x_{p,1}(t) = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t)$$

$$\dot{x}_{p,1}(t) = 2A \cdot \cos(2t) - 2B \cdot \sin(2t)$$

$$\ddot{x}_{p,1}(t) = -4A\sin(2t) - 4B\cos(2t)$$

$$(A - 2B - 4A)\sin(2t) + (B + 2A - 4B)\cos(2t) = \sin(2t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3A - 2B = 1 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{13} \\ B = -\frac{2}{13} \end{cases}$$

$$x_{p,1}(t) = -\frac{3}{13}\sin(2t) - \frac{2}{13}\cos(2t)$$

SECONDA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = t$$

$$x_{p,2}(t) = Ct + D$$

$$\dot{x}_{p,2}(t) = C$$

$$\ddot{x}_{p,2}(t) = 0$$

$$Ct + (C + D) = t \rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$x_{p,2}(t) = t - 1$$

SOLUZIONE GENERALE:

$$x(T) = x_0(T) + x_{p,1}(T) + x_{p,2}(T) =$$

$$= e^{-\frac{T}{2}}\left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right) - \frac{3}{13}\sin(2T) - \frac{2}{13}\cos(2T) + T - 1$$

PROBLEMA DI CAUCHY:

$$x(0) = -13$$

$$c_1 - \frac{2}{13} - 1 = -13$$

$$c_1 = \frac{2}{13} - 12 = -\frac{154}{13}$$

$$\dot{x}(T) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{T}{2}}\left(-\frac{154}{13}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{T}{2}}\left(\frac{154}{13}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right) + c_2 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right) +$$

$$- \frac{6}{13}\cos(2T) + \frac{4}{13}\sin(2T) + 1$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{154}{13}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{6}{13} + 1 = 0$$

$$c_2 = \left(\frac{6}{13} - 1 - \frac{77}{13}\right)\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{84}{13}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{56\sqrt{3}}{13}$$

$$x(T) =$$

$$= -\frac{e^{-\frac{T}{2}}}{13}\left(154\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right) + 56\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}T\right)\right) - \frac{3}{13}\sin(2T) - \frac{2}{13}\cos(2T) + T - 1$$

Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Lorenzo de Leonardis, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 9

Esercizio 1.

Esercizio 2. (i) Se $f(x)$ è pari, ovvero $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\ dt = -\int_0^x f(-s)\ ds$ facendo il cambio di variabile $t = -s$. Allora dato che f è pari: $-\int_0^x f(-s)\ ds = -\int_0^x f(s)\ ds = -F(x)$, ovvero $F(x)$ è dispari.

(ii) Se $f(x)$ è periodica di periodo T e $\int_0^T f(t)\ dt = 0$, allora $F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)\ dt$; cambio di variabile $t = s + T$, quindi: $F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)\ dt = \int_{-T}^{x} f(s-T)\ ds = \int_{-T}^{x} f(s)\ ds$ poiché $f(x)$ è periodica e $f(x-T) = f(x)$

Quindi: $\int_{-T}^{x} f(s)\ ds = \int_{-T}^{0} f(s)\ ds + \int_0^x f(s)\ ds$.

Adesso $\int_{-T}^{0} f(s)\ ds = \int_0^T f(z-T)\ dz = \int_0^T f(z)\ dz = 0$ per ipotesi.

Quindi: $\int_{-T}^{x} f(s)\ ds = \int_{-T}^{0} f(s)\ ds + \int_0^x f(s)\ ds = 0 + \int_0^x f(s)\ ds = \int_0^x f(s)\ ds = F(x)$.

Quindi $F(x)$ è periodica di periodo T.

(iii) Se $f(x)$ è dispari allora $\forall r \in \mathbb{R}$ vale $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(x)\, dx = -\int_{r}^{-r} f(-t)\, dt$ facendo un cambio di variabile $x = -t$. Ma $\displaystyle\int_{r}^{-r} -f(-t)\, dt = \int_{r}^{-r} f(t)\, dt$ perchè f è dispari. Allora:

$$\int_{-r}^{r} f(t)\, dt = \int_{r}^{-r} f(t)\, dt = -\int_{-r}^{r} f(t)\, dt$$

Ma quindi $2\displaystyle\int_{-r}^{r} f(t)\, dt = 0$ che implica che $\displaystyle\int_{-r}^{r} f(t)\, dt = 0$

Esercizio 3.

(ii) Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = 3te^{t^2}x \\ x(0) = \sqrt{e^3} \end{cases}$

Risolvo l'equazione differenziale con separazione di variabili:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 3te^{t^2}$$

Integro in dt:

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\, dt = \int 3te^{t^2}\, dt$$

e ottengo:

$$x(t) = ce^{\frac{3}{2}e^{t^2}} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Ora risolvo il problema di Cauchy:

$$\sqrt{e^3} = x(0) = ce^{\frac{3}{2}}$$

da cui segue che $c = 1$ e allora la soluzione è:

$$x(t) = e^{\frac{3}{2}e^{t^2}}$$

(v) Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} 10\dot{x} - 2tx = t^3 \\ x(0) = -5 \end{cases}$

Risolvo l'equazione omogenea associata con separazione di variabili:

$$10\dot{x} - 2tx = 0$$

e ottengo:

$$x_o(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Ora uso il metodo di Lagrange delle variazioni di costanti per ottenere la soluzione particolare. Considero una soluzione particolare del tipo:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$$

Quindi $x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$; $\dot{x}_p(t) = \dot{c(t)}e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\frac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}}$ allora l'equazione deve verificare che:

$$10\left(\dot{c(t)}e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\tfrac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}}\right) - 2t\left(c(t)e^{\frac{t^2}{10}}\right) = t^3$$

Quindi: $c(t) = \frac{1}{10}\displaystyle\int t^3 e^{-\frac{t^2}{10}}\,dt = -\frac{t^2}{2}e^{-\frac{t^2}{10}} - 5e^{-\frac{t^2}{10}} + c$
Allora la soluzione particolare è:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}} = -\tfrac{t^2}{2} - 5$$

Allora la generica soluzione all'equazione differenziale è:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} - \tfrac{t^2}{2} - 5 \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Adesso risolvo il problema di Cauchy:

$$-5 = x(0) = c - 5$$

e trovo che $c = 0$ da cui segue che la soluzione al problema è:

$$x(t) = -\tfrac{t^2}{2} - 5$$

(viii) Risolvo il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} \ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = te^{3t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$
Risolvo l'equazione omogenea associata:

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = 0$$

Cercando soluzioni del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$ come al solito passo al polinomio associato:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Trovo $\lambda_{1,2} = 3, 4$ e quindi la soluzione dell'equazione diff. omogenea associata è:

$$x_o(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{4t} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora cerco la soluzione particolare nella seguente forma: $x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c)$, poiché derivate e somme di polinomi per esponenziali continuano ad essere polinomi per esponenziali.

Quindi $x_p(t) = e^{3t}(at^2+bt+c)$; $\dot{x}_p(t) = e^{3t}(3at^2+(2a+3b)t+b+3c)$; $\ddot{x}(t) = e^{3t}(9at^2 + 12at + 2a + 9bt + 6b + 9c)$ allora l'equazione deve verificare che:

$$e^{3t}(9at^2 + 12at + 2a + 9bt + 6b + 9c) - 7e^{3t}(3at^2 + (2a + 3b)t + b + 3c) + \\ 12e^{3t}(at^2 + bt + c) = te^{3t}$$

Quindi basta prendere $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$ e $c = 0$ La solzione generale è quindi:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} + e^{3t}(-\tfrac{1}{2}t^2 - t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora risolvo il problema di Cauchy tale per cui $x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 1$ e trovo quanto valgono c_1 e c_2:

$$\begin{cases} 1 = x(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = \dot{x}(0) = 3c_1 + 4c_2 - 1 \end{cases}$$

Quindi per risolvere il problema di Cauchy basta prende $c_1 = 3$ e $c_2 = -2$

Soluzione finale:

$$x(t) = 3e^{3t} - 2e^{4t} + e^{3t}(-\tfrac{1}{2}t^2 - t)$$

(ix) Risolvo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata:

$$2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

Cercando soluzioni del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$ come al solito passo al polinomio associato:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Trovo $\lambda_{1,2} = 1, \frac{1}{2}$ e quindi la soluzione dell'equazione diff. omogenea associata è:

$$x_o(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora cerco la soluzione particolare nella seguente forma: $x_p(t) = at + b$, poiché derivate e somme di polinomi continuano ad essere polinomi.

Quindi $x_p(t) = at + b;\ \dot{x}_p(t) = a;\ \ddot{x}(t) = 0$ allora l'equazione deve verificare che:

$$0 - 3a + at + b = t$$

Quindi basta prendere $a = 1$ e $b = 3$ La solzione generale è quindi:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t} + t + 3 \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora risolvo il problema di Cauchy tale per cui $x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 1$ e trovo quanto valgono c_1 e c_2:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = c_1 + c_2 + 3 \\ 1 = \dot{x}(0) = c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 1 \end{cases}$$

Quindi per risolvere il problema di Cauchy basta prende $c_1 = 3$ e $c_2 = -6$

Soluzione finale:

$$x(t) = 3e^t - 6e^{\frac{1}{2}t} + t + 3$$