Analisi Matematica 1 - I Appello

Esercizio 1) [8 punti] Determinare per $A = \{|x| : x^2 + x < 2\} \cup \left\{ \frac{2n^2+3}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.

Siccome la disuguaglianza $x^2 + x < 2$ è soddisfatta per $-2 < x < 1$, abbiamo che $\{|x| : x^2 + x < 2\} = [0, 2)$. La successione $a_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2 + \frac{1}{n^2+1}$ è strettamente decrescente da $a_1 = \frac{5}{2}$ a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$. Quindi $\min A = 0$ e $\max A = \frac{5}{2}$.

Esercizio 2) [12 punti] Provare che $17 \cdot 5^n + 7 \cdot 11^n$ è divisibile per 6 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per $n = 1$ abbiamo che 162 è divisibile per 6. Supponendo tale proprietá vera per n, abbiamo che

$$17 \cdot 5^{n+1} + 7 \cdot 11^{n+1} = 5(17 \cdot 5^n + 7 \cdot 11^n) + 42 \cdot 11^n$$

è ancora divisibile per 6 come somma di due numeri entrambi divisibili per 6.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\log[1 - \cos(2x)]}{\log[\tan(2x)]}$.

Dalla formula di de L'Hopital abbiamo che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log[1 - \cos(2x)]}{\log[\tan(2x)]} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2(2x)\cos(2x)}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x\to0^+} (\frac{\sin(2x)}{2x})^2 \frac{(2x)^2}{1 - \cos(2x)} = 2$$

dai limiti notevoli di seno e coseno.

Esercizio 4) [16 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4 + \sin(2^{-n})} - 1\right)^{\frac{1}{\log(2^n+1) - n\log 2}}$.

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4 + \sin(2^{-n})} - 2}{\log(2^n + 1) - n\log 2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(2^{-n})}{\log(1 + 2^{-n})(\sqrt{4 + \sin(2^{-n})} + 2)} = \frac{1}{4}$$

dai limiti notevoli di seno e logaritmo, abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4 + \sin(2^{-n})} - 1\right)^{\frac{1}{\log(2^n+1) - n\log 2}} &= \lim_{n\to+\infty} \left[(1 + \sqrt{4 + \sin(2^{-n})} - 2)^{\frac{1}{\sqrt{4+\sin(2^{-n})}-2}}\right]^{\frac{\sqrt{4+\sin(2^{-n})}-2}{\log(2^n+1) - n\log 2}} \\ &= e^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

dal limite notevole di Nepero.

Esercizio 5) [16 punti] Determinare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1 - \sin x)(1 - \cos x)} dx$

Dal cambio di variabile $t = \tan \frac{x}{2}$ otteniamo che

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \sin x)(1 - \cos x)} dx = \int \frac{2dt}{t(t - 1)^2}\Big|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$

Dal metodo dei fratti semplici abbiamo che

$$\int \frac{2dt}{t(t-1)^2} = \int [\frac{2}{t} - \frac{2}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2}]dt = 2\log|\frac{t}{t-1}| - \frac{2}{t-1} + c$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{(1-\sin x)(1-\cos x)}dx &= 2\log|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}-1}| - \frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1} + c \\ &= 2\log|\frac{\sin x - \cos x + 1}{\cos x}| + \frac{\sin x + 1}{\cos x} + c'.\end{aligned}$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $t\sin t\sin x - (1-\cos x)x' = 0$ con $x(0) = \frac{2\pi}{3}$.

Poiché $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, per $t \sim 0$ posso risolvere l'equazione per separazione di variabili:

$$\int_0^t s\sin s ds = \int_0^t \frac{1-\cos x(s)}{\sin x(s)}x'(s)ds = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{x(t)} \frac{1-\cos x}{\sin x}dx.$$

Siccome abbiamo che

$$\int_0^t s\sin s ds = -t\cos t + \int_0^t \cos s ds = \sin t - t\cos t$$

tramite integrazione per parti e

$$\int \frac{1-\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\log|1+\cos x| + c,$$

otteniamo che $\log|1+\cos x(t)| = t\cos t - \sin t - \log 2$ e quindi

$$x(t) = \arccos\Big[\frac{e^{t\cos t - \sin t}}{2} - 1\Big].$$

Esercizio 7) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = (x+5)e^{\frac{x}{x-1}}$.
Dominio $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f > 0\} = (-5, +\infty)$, $(0, 5)$, $(-5, 0)$

Asintoti: $x = 1$ verticale da destra, $y = ex + 6e$ asintoto obliquo a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = e$$

e dal limite notevole dell'esponenziale

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ex] = 5e + \lim_{x\to\pm\infty} ex[e^{\frac{1}{x-1}} - 1] = 5e + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ex}{x-1} = 6e$$

Monotonia di f

$$f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \frac{x^2 - 3x - 4}{(x-1)^2}, \quad \{f' > 0\} = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \frac{13x - 7}{(x-1)^4}, \quad \{f'' > 0\} = (\frac{7}{13}, 1) \cup (1, +\infty)$$