Analisi Matematica 1 - II parte del I Esonero

Esercizi a risposta aperta

Esercizio 1) [8 punti] Dimostrare per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$(1+x_1)\dots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n$$

per ogni scelta di numeri $x_1, \dots, x_n \geq -1$ aventi tutto lo stesso segno.

Per $n = 1$ la disuguaglianza si riduce a $1 + x_1 \geq 1 + x_1$ ed è ovviamente vera. Se supponiamo la disuguaglianza vera per $n \geq 1$, abbiamo che vale

$$(1+x_1)\dots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq (1+x_1+\dots+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 1+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}$$

poiché $1 + x_{n+1} \geq 0$ e $(x_1 + \dots + x_n)x_{n+1} \geq 0$ in quanto $x_1, \dots, x_{n+1}$ possiedono tutti lo stesso segno. Dal principio di induzione abbiamo cosí mostrato che la disuguaglianza vale per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 2) [12 punti] Determinare l'estremo inferiore/superiore dell'insieme

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n^4}{n^4+1}\right) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

discutendo se si tratta di massimo/minimo.

Siccome $\frac{n^4}{n^4+1} = 1 - \frac{1}{n^4+1}$ è crescente, la successione $a_n = \sin(\frac{\pi}{2}\frac{n^4}{n^4+1})$ anche è crescente e quindi

$$\inf A = \min A = a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sup_A = \lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

Esercizio 3) [14 punti] Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{n}{2}} \frac{\log(e^{n^{-n}} - 1)}{\sqrt{e^n - \log n!} - \sqrt{e^n}}.$$

Siccome $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n \log n}{\log n!} = 1$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} \log n! = 0$, abbiamo che tramite razionalizzazione

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{n}{2}} \frac{\log(e^{n^{-n}} - 1)}{\sqrt{e^n - \log n!} - \sqrt{e^n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{-n} \frac{n \log n - \log \frac{e^{n^{-n}}-1}{n^{-n}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-n} \log n!}} = 2 \lim_{n \to +\infty} \frac{n \log n - \log \frac{e^{n^{-n}}-1}{n^{-n}}}{\log n!} = 2$$

grazie al limite notevole del logaritmo.

Esercizio 4) [16 punti] Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin^2 x)\cos x\right]^{\frac{1}{\sqrt{1+e^{x^2}}-\sqrt{2}}}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x+\cos x-1}{\sqrt{1+e^{x^2}}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cos x+\cos x-1}{e^{x^2}-1} = \sqrt{2}$$

grazie ai limiti notevoli di seno/coseno/esponenziale e tramite razionalizzazione, dal limite notevole di Nepero abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin^2 x)\cos x\right]^{\frac{1}{\sqrt{1+e^{x^2}}-\sqrt{2}}} &= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\sin^2 x\cos x+\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\sin^2 x\cos x+\cos x-1}}\right\}^{\frac{\sin^2 x\cos x+\cos x-1}{\sqrt{1+e^{x^2}}-\sqrt{2}}}\\ &= e^{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Esercizio 5) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\log(x^2)\right)$.
Dominio $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f>0\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $(-1,0)$

Osserviamo che $\frac{x+1}{x-1}$ e $\log(x^2)$ sono entrambe positive esattamente in $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
Asintoti: $x=1$ discontinuitá di salto, $y=\frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 1^\pm}f(x)=\pm\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$$

Monotonia di f

$$f'(x)=\frac{2}{1+[\frac{x+1}{x-1}+\log(x^2)]^2}\,\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)^2},\quad \{f'>0\}=(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$$