Analisi Matematica 1 - II Appello

Esercizio 1) [8 punti] Determinare per $A = \left\{\frac{2}{n+1} - \frac{3}{(n+1)^2} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ l'estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo/minimo.

Data $a_n = \frac{2}{n+1} - \frac{3}{(n+1)^2}$, vogliamo mostrare che $\inf_A = 0$ e $\max_A = a_2 = \dfrac{1}{3}$. Infatti $a_n > 0$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché equivalente a $2n + 2 > 3$ ed abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, che provano $\inf_A = 0$. La disuguaglianza $a_n < \frac{1}{3}$ puó essere riscritta come $\frac{n^2-4n+4}{(n+1)^2} = \frac{(n-2)^2}{(n+1)^2} > 0$ che è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$, mostrando che $\max_A = a_2 = \dfrac{1}{3}$.

Esercizio 2) [12 punti] Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ è valida la disuguaglianza $2^n \geq n^2 + 1$.

La disuguaglianza $2^n \geq n^2 + 1$ è chiaramente vera per $n = 1$ e falsa per $n = 2, 3, 4$. Per $n = 5$ abbiamo che $2^5 = 32 \geq 5^2 + 1 = 26$ è vera. Supponendo tale proprietá vera per $n \geq 5$, abbiamo che $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n^2 + 1)$. Siccome $2(n^2 + 1) \geq (n + 1)^2 + 1$ equivale a $n(n - 2) \geq 0$, otteniamo che $2^{n+1} \geq (n + 1)^2 + 1$ e quindi dal principio di induzione la disuguaglianza $2^n \geq n^2 + 1$ è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, oltre che per $n = 1$.

Esercizio 3) [12 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 1 - e^{2x} + 2x^2}{\sqrt{1 + x^3} - 1}$.

Razionalizzando abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 1 - e^{2x} + 2x^2}{\sqrt{1 + x^3} - 1} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 1 - e^{2x} + 2x^2}{x^3}$$

e dalla formula di de L'Hopital otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 1 - e^{2x} + 2x^2}{\sqrt{1 + x^3} - 1} = \frac{4}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{2x} + 2x}{x^2} = -\frac{8}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + e^{2x} - 1}{2x} = -\frac{16}{3}$$

dai limiti notevoli di seno ed esponenziale.

Esercizio 4) [16 punti] Calcolare, se esiste, il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sin(\frac{\pi n}{2n + 2})\right)^{\tan[n\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]}$.

Siccome tramite razionalizzazione

$$\sin(\frac{\pi n}{2n + 2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n + 1)}) = \cos(\frac{\pi}{2(n + 1)})$$

e

$$\cos[n\pi(\sqrt{n^2 + 1} - n)] = \cos(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}) = \sin(\frac{\pi}{2(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}),$$

abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\cos(\frac{\pi}{2(n+1)})-1\Big)\tan[n\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{2(n+1)})-1}{\sin(\frac{\pi}{2(\sqrt{n^2+1}+n)^2})}$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{8(n+1)^2}\frac{2(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\pi}=-\pi$$

dai limiti notevoli di seno e coseno. Otteniamo quindi che

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sin(\frac{\pi n}{2n+2})\Big)^{\tan[n\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Big[(1+\cos(\frac{\pi}{2(n+1)})-1)^{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2(n+1)})-1}}\Big]^{[\cos(\frac{\pi}{2(n+1)})-1]\tan[n\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]}=e^{-\pi}$$

dal limite notevole di Nepero.

Esercizio 5) [16 punti] Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

Dal cambio di variabile $\frac{x+1}{2}=\sin t$ otteniamo che

$$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)[1-(\frac{x+1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t\cos^2 t}.$$

Dal cambio di variabile $s=\cos t$ otteniamo che

$$\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t dt}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}=-\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{ds}{s^2(s^2-1)}$$

e dal metodo dei fratti semplici abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx &= \frac{1}{16}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s^2}]ds=\frac{1}{16}\log|\frac{s+1}{s-1}|-\frac{1}{8s}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &= \frac{1}{8}\log\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 6) [16 punti] Determinare la soluzione di $x''-3x'+2x=\frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}$ con $x(0)=3-\log 2$, $x'(0)=\frac{9}{2}-2\log 2$.

Il polinomio caratteristico $P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$ ha radici $1,2$ e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma $x_{om}(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}$, c_1, $c_2\in\mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{x}(t)=c_1(t)e^t+c_2(t)e^{2t}$, ove c_1 e c_2 risolvono il sistema

$$c_1'e^t+c_2'e^{2t}=0,\quad c_1'e^t+2c_2'e^{2t}=\frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo che

$$c_1(t) = -\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt = -\int \frac{ds}{(s+1)^2}\Big|_{s=e^t} = \frac{1}{e^t+1}$$

e

$$c_2(t) = \int \frac{dt}{(e^t+1)^2} = \int \frac{ds}{s(s+1)^2}\Big|_{s=e^t} = \int [\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}]ds\Big|_{s=e^t} = \log\frac{e^t}{e^t+1} + \frac{1}{e^t+1}.$$

La soluzione generale dell'equazione si scrive della forma

$$x(t) = x_{om}(t) + \bar{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{e^t+1} + e^{2t}\log\frac{e^t}{e^t+1} + \frac{e^{2t}}{e^t+1}$$

e le costanti c_1, c_2 devono soddisfare il sistema

$$1 - \log 2 + c_1 + c_2 = 3 - 2\log 2, \quad \frac{3}{2} - 2\log 2 + c_1 + 2c_2 = \frac{9}{2} - 2\log 2.$$

Abbiamo che $c_1 = c_2 = 1$ e quindi la soluzione cercata è

$$x(t) = e^t + e^{2t} + \frac{e^t}{e^t+1} + e^{2t}\log\frac{e^t}{e^t+1} + \frac{e^{2t}}{e^t+1}.$$

Esercizio 7) [20 punti] Studiare il grafico della funzione $f(x) = \log\frac{x^2}{|x+2|}$.
Dominio $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$

Intersezione assi e segno di f $\{f>0\} = (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$, $(2,0)$, $(-1,0)$

poiché

$$x^2 > |x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+2>0 & \text{se } x<-2 \\ x^2-x-2 & \text{se } x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1 \text{ o } x>2$$

Asintoti: verticali $x=-2$ e $x=0$, no asintoti orrizontali/obliqui a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

Monotonia di f

$$f'(x) = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad \{f'>0\} = (-4,-2)\cup(0,+\infty)$$

Convessitá di f

$$f''(x) = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2}, \quad \{f''>0\} = (-4-2\sqrt{2}, -4+2\sqrt{2})$$