Analisi Matematica 1 - II Esonero

Esercizio 1) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to+\infty} x\Big[\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\Big]$

Dalla formula di de L'Hopital otteniamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\Big[\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\Big] &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty}[\frac{\pi}{4}\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{x^2}{1+x^2}] \\ &= \frac{\pi}{4} - 1\end{aligned}$$

Esercizio 2) [8 punti] Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x - x)}{x\log(1+3x)}$

Dalla formula di de L'Hopital otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x - x)}{x\log(1+3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x - x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{6x(e^x - x)} = \frac{1}{6}$$

grazie ai limiti notevoli di logaritmo ed esponenziale.

Esercizio 3) [16 punti] Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{2+\cos x}dx$

Tramite il cambio di variabile $t = \tan\frac{x}{2}$ abbiamo che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{2+\cos x}dx = 2\int_0^1\frac{t^2-2t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}dt.$$

Dal metodo dei fratti semplici otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{2+\cos x}dx &= 2\int_0^1[-\frac{t}{t^2+1}+\frac{t+1}{t^2+3}]dt = \log(\frac{t^2+3}{t^2+1}) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{3}})\Big|_0^1 \\ &= \log\frac{2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Esercizio 4) [16 punti] Calcolare l'integrale indefinito $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$

Tramite il cambio di variabile $t = \sqrt{x^2+2x-3} - x$, ossia $x = -\frac{t^2+3}{2(t-1)}$ e $dx = -\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}dt$, abbiamo che

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{t^2+3}{(t-1)^2}dt\Big|_{\sqrt{x^2+2x-3}-x}.$$

Dal metodo dei fratti semplici otteniamo che

$$\frac{1}{2}\int\frac{t^2+3}{(t-1)^2}dt = \int[\frac{1}{2}+\frac{1}{t-1}+\frac{2}{(t-1)^2}]dt = \frac{t}{2} + \log|t-1| - \frac{2}{t-1} + c$$

e quindi

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{2} + \log|\sqrt{x^2+2x-3}-x-1| - \frac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}-x-1} + c.$$

Esercizio 5) [16 punti] Determinare la soluzione $x(t)$ dell'equazione $x' = \sin(\log t)\cos^2 x$ con $x(1) = 0$

Siccome $\cos^2(0) = 1 \neq 0$, per $t \sim 1$ per separazione delle variabili otteniamo

$$\int_1^t \sin(\log s)ds = \int_1^t \frac{x'(s)}{\cos^2 x(s)}ds = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Poiché

$$\int e^z \sin z dz = e^z \sin z - \int e^z \cos z = e^z(\sin z - \cos z) - \int e^z \sin z dz \Rightarrow \int e^z \sin z dz = e^z \frac{\sin z - \cos z}{2}$$

tramite una doppia integrazione per parti, ponendo $z = \log s$ abbiamo che

$$\int_1^t \sin(\log s)ds = \int_0^{\log t} e^z \sin z dz = \frac{t\sin(\log t) - t\cos(\log t) + 1}{2}.$$

Siccome $\displaystyle\int_0^{x(t)} \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x(t)$ otteniamo che

$$x(t) = \arctan\Big[\frac{t\sin(\log t) - t\cos(\log t) + 1}{2}\Big].$$

Esercizio 6) [16 punti] Detto $\lambda_0 = \sin(-2)$, determinare la soluzione $x(t)$ dell'equazione $x' = \frac{2t+1}{t^2+6t+9}x + (t+3)^2 e^{-5\frac{t+2}{t+3}} \frac{\cos^3 t}{1+\sin^2 t}$ con $x(-2) = -\lambda_0 + 2\arctan\lambda_0$

Con il metodo dei fratti semplici calcoliamo

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{-2}^t \frac{2s+1}{s^2+6s+9}ds = \int_{-2}^t \frac{2s+1}{(s+3)^2}ds = \int_{-2}^t [\frac{2}{s+3} - \frac{5}{(s+3)^2}]ds = 2\log|s+3| + \frac{5}{s+3}\Big|_{-2}^t \\ &= 2\log(t+3) - 5\frac{t+2}{t+3} \end{aligned}$$

per $t \sim -2$ e

$$\begin{aligned} \int_{-2}^t e^{-A(s)}(s+3)^2 e^{-5\frac{s+2}{s+3}} \frac{\cos^3 s}{1+\sin^2 s}ds &= \int_{-2}^t \frac{1-\sin^2 s}{1+\sin^2 s}\cos s ds = \int_{\lambda_0}^{\sin t} \frac{1-z^2}{1+z^2}dz = 2\arctan z - z\Big|_{\lambda_0}^{\sin t} \\ &= 2\arctan(\sin t) - \sin t - 2\arctan\lambda_0 + \lambda_0 \end{aligned}$$

tramite il cambio di variabile $z = \sin s$. Dalla formula risolutiva delle ODE lineari del I ordine a coefficienti variabili otteniamo che

$$x(t) = e^{A(t)}[\int_{-2}^t e^{-A(s)}(s+3)^2 e^{-5\frac{s+2}{s+3}} \frac{\cos^3 s}{1+\sin^2 s}ds + x(-2)] = (t+3)^2 e^{-5\frac{t+2}{t+3}}[2\arctan(\sin t) - \sin t].$$

Esercizio 7) [20 punti] Determinare l'unica soluzione di $x''+3x'+2x=\frac{e^t+2}{e^{4t}-1}$ con condizioni iniziali $x(\log 2)=-\frac{15}{8}\arctan 2-\frac{1}{16}\log 3-\frac{1}{4}\log 5$, $x'(\log 2)=\frac{7}{4}\arctan 2+\frac{3}{8}\log 5$

Il polinomio caratteristico $P(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2$ ha radici $-1,-2$ e quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono della forma $x_{om}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$, c_1, $c_2\in\mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\bar{x}(t)=c_1(t)e^{-t}+c_2(t)e^{-2t}$, ove c_1 e c_2 risolvono il sistema

$$c_1'e^{-t}+c_2'e^{-2t}=0,\quad -c_1'e^{-t}-2c_2'e^{-2t}=\frac{e^t+2}{e^{4t}-1}.$$

Risolvendo il sistema otteniamo che

$$c_1(t)=\int e^t\frac{e^t+2}{e^{4t}-1}dt=\int\frac{s+2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}\Big|_{s=e^t}$$

e

$$c_2(t)=-\int e^{2t}\frac{e^t+2}{e^{4t}-1}dt=-\int\frac{s(s+2)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}\Big|_{s=e^t}.$$

Dal metodo dei fratti semplici abbiamo che

$$\int\frac{s+2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{4}\int[\frac{3}{s-1}-\frac{1}{s+1}-2\frac{s+2}{s^2+1}]ds=\frac{1}{4}\log|\frac{(s-1)^3}{(s+1)(s^2+1)}|-\arctan s$$

e

$$-\int\frac{s(s+2)}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{4}\int[\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+1}-2\frac{2s-1}{s^2+1}]ds=-\frac{1}{4}\log|\frac{(s-1)^3(s+1)}{(s^2+1)^2}|-\frac{1}{2}\arctan s$$

ottenendo quindi

$$c_1(t)=\frac{1}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}|-\arctan(e^t),\quad c_2(t)=-\frac{1}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3(e^t+1)}{(e^{2t}+1)^2}|-\frac{1}{2}\arctan(e^t).$$

La soluzione generale dell'equazione si scrive della forma

$$\begin{aligned}x(t)&=x_{om}(t)+\bar{x}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{e^{-t}}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}|-e^{-t}\arctan(e^t)\\&\quad-\frac{e^{-2t}}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3(e^t+1)}{(e^{2t}+1)^2}|-\frac{e^{-2t}}{2}\arctan(e^t)\end{aligned}$$

e le costanti c_1, c_2 devono soddisfare il sistema

$$2c_1+c_2=-5\arctan 2+\frac{1}{2}\log 3-\log 5,\quad c_1+c_2=-2\arctan 2+\frac{1}{2}\log 3-\log 5.$$

Siccome $c_1=-3\arctan 2$ e $c_2=\arctan 2+\frac{1}{2}\log 3-\log 5$, abbiamo che la soluzione cercata è

$$\begin{aligned}x(t)&=-3e^{-t}\arctan 2+(\arctan 2+\frac{1}{2}\log 3-\log 5)e^{-2t}+\frac{e^{-t}}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3}{(e^t+1)(e^{2t}+1)}|-e^{-t}\arctan(e^t)\\&\quad-\frac{e^{-2t}}{4}\log|\frac{(e^t-1)^3(e^t+1)}{(e^{2t}+1)^2}|-\frac{e^{-2t}}{2}\arctan(e^t).\end{aligned}$$