

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 1

Esercizio 1. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti identità.

(i) Supponiamo $n = 0$: allora $\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; d'altro canto

$(0+1)^2 = 1$. Ora $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (2n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$; per ipotesi

induttiva possiamo supporre $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = (n-1+1)^2 = n^2$, quindi

$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2n+1 + n^2 = (n+1)^2$. Grazie al principio di induzione
concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 0$.

(ii) Supponiamo $n = 1$: allora $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4 \cdot 1^2 - 1} = \frac{1}{3}$; d'altro canto

$\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$. Vogliamo verificare che $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} =$

$\frac{n+1}{2n+3}$. Ora $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$; per ipotesi in-

duittiva possiamo supporre $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, quindi $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} =$

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2 - 1} &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4\left(n^2 + 2n + \frac{3}{4}\right)} = \\
\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2}\right)} &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \\
\frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} &= \frac{2\left(n^2 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \\
\frac{n+1}{2n+3}.
\end{aligned}$$

Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(iii) **Passo base:** Per $n = 1$, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

D'altra parte, $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, quindi il passo base è verificato.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per n , ovvero che

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dobbiamo dimostrare che la formula è vera anche per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) =$$

Usando l'ipotesi induttiva, possiamo sostituire la somma fino a n :

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Quindi, abbiamo mostrato che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

che è esattamente la formula per $n+1$.

(iv) **Passo base:** Per $n = 0$, abbiamo:

$$\prod_{k=0}^0 (1 + x^{2^k}) = 1 + x^{2^0} = 1 + x$$

D'altra parte, per $n = 0$,

$$\frac{1 - x^{2^{0+1}}}{1 - x} = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Osserviamo che

$$\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x$$

quindi il passo base è verificato.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per $n = m$, ovvero che

$$\prod_{k=0}^m (1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x}$$

Dobbiamo dimostrare che la formula è vera anche per $n = m+1$. Consideriamo la produttoria per $n = m+1$:

$$\prod_{k=0}^{m+1} (1+x^{2^k}) = \left(\prod_{k=0}^m (1+x^{2^k}) \right) \cdot (1+x^{2^{m+1}})$$

Usando l'ipotesi induttiva, possiamo sostituire la produttoria fino a m :

$$= \frac{1-x^{2^{m+1}}}{1-x} \cdot (1+x^{2^{m+1}})$$

Ora, notiamo che

$$(1-x^{2^{m+1}})(1+x^{2^{m+1}}) = 1-x^{2^{m+2}}$$

Quindi, abbiamo:

$$\frac{1-x^{2^{m+2}}}{1-x}$$

che è esattamente la formula per $n = m+1$.

(v) Supponiamo $n = 1$: allora $\prod_{k=1}^1 (2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1$; d'altro canto

$$\frac{(2 \cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!} = \frac{2}{2} = 1. \text{ Ora } \prod_{k=1}^n (2k-1) = (2n-1) \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1); \text{ per ipotesi}$$

$$\text{induttiva possiamo supporre } \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!},$$

$$\text{quindi } \prod_{k=1}^n (2k-1) = (2n-1) \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}, \text{ e moltiplicando}$$

$$\text{sia il numeratore che il denominatore per } 2n \text{ otteniamo } \prod_{k=1}^n (2k-1) =$$

$$\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{(2n)(2n-1)!}{2^{n-1} \cdot 2n(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \text{ Grazie al principio di}$$

induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 2. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti disuguaglianze.

- (i) Supponiamo $n = 1$: allora $1^3 = 1$; d'altro canto $2 \cdot 1 - 2 = 0$ e ovviamente $1 > 0$. Vogliamo verificare che $(n+1)^3 > 2(n+1) - 2 = 2n$. Ora $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $n^3 > 2n - 2$, quindi $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 2n - 2 + 3n^2 + 3n + 1 = 5n - 1 + 3n^2 > 5n - 1$, oltretutto la disequazione $5n - 1 > 2n$ è verificata per ogni numero intero maggiore di 0, q in conclusione $(n+1)^3 > 5n - 1 > 2n$. Grazie al principio di induzione concludiamo che la disequazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.
- (ii) Supponiamo $n = 10$: allora $2^{10} = 1024$; d'altro canto $10^3 = 1000$, e ovviamente $1024 > 1000$. Vogliamo verificare che $2^{n+1} > (n+1)^3$. Ora $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$; per ipotesi induttiva possiamo supporre $2^n > n^3$, quindi $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$. Osserviamo che la disequazione $2n^3 > (n+1)^3$, applicando la radice cubica, diventa $2^{\frac{1}{3}}n > n+1$ e isolando la n otteniamo $n > \frac{1}{2^{\frac{1}{3}} - 1}$; notiamo anche che $10 > \frac{1}{2^{\frac{1}{3}} - 1}$. Questo significa che preso $n \geq 10$ la disequazione $2n^3 > (n+1)^3$ è verificata, ma da quanto ipotizzato abbiamo anche $2^{n+1} > 2n^3$, e per transitività finalmente possiamo scrivere $2^{n+1} > (n+1)^3$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 10$.

Esercizio 3. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni.

- (i) Supponiamo $n = 0$: allora $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$, e chiaramente 0 è divisibile per 3. Vogliamo dimostrare che $(n+1)^3 + 2(n+1)$ è divisibile per 3. Ora $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = (n^3 + 2n) + 3n + 3 = (n^3 + 2n) + 3(n+1)$; per ipotesi induttiva possiamo supporre che $n^3 + 2n$ sia divisibile per 3, quindi il numero $(n+1)^3 + 2(n+1)$ è visibile per 3 essendo somma di due numeri entrambi divisibili per 3. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$.
- (ii) Supponiamo $n = 0$: allora $2^{2 \cdot 0 + 1} + 5^{2 \cdot 0 + 1} = 2 + 5 = 7$, e chiaramente 7 è divisibile per se stesso. Vogliamo dimostrare che $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1}$ è divisibile per 7. Ora $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1} = 2^2 \cdot 2^{2n+1} + 5^2 \cdot 5^{2n+1} = 4 \cdot 2^{2n+1} + 4 \cdot 5^{2n+1} + 21 \cdot 5^{2n+1} = 4(2^{2n+1} + 5^{2n+1}) + 21 \cdot 5^{2n+1}$; per ipotesi induttiva possiamo supporre che $2^{2n+1} + 5^{2n+1}$ sia divisibile per 7; oltretutto 21 è divisibile per 7, quindi $2^{2(n+1)+1} + 5^{2(n+1)+1} = 4(2^{2n+1} + 5^{2n+1}) + 21 \cdot 5^{2n+1}$ è divisibile per 7. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^3 + 2n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 0$.
- (iii) Suppongo $n = 1$ e banalmente $1^1 - 1 = 0$ è divisibile per 8. Ora per ipotesi induttiva so che fino ad n con n dispari è verificata l'affermazione. Verifico che vale anche per $n+2$, ovvero il numero dispari successivo: infatti $(n+2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 4 - 1 = (n^2 - 1) + 4n + 4$. Per ipotesi induttiva $n^2 - 1$ è divisibile per 8. Ma anche $4n + 4$ lo è, infatti n è dispari quindi esiste un k tale per cui $n = 2k + 1$. Allora $4n + 4 = 8k + 4 + 4 = 8k + 8 = 8(k + 1)$

che è divisibile per 8. Grazie al principio di induzione concludiamo che il numero $n^2 - 1$ è divisibile per 8 per ogni $n \geq 1$ dispari.

(iv) **Passo base:** Verifichiamo la proprietà per $n = 1$:

$$2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Poiché 3 è divisibile per 3, la proprietà è vera per $n = 1$.

Passo induttivo: Supponiamo che la proprietà sia vera per $n = k$, dove k è dispari, cioè supponiamo che:

$$2^k + 1 \text{ è divisibile per } 3.$$

Dobbiamo dimostrare che la proprietà è vera anche per $n = k + 2$ (il successivo numero dispari). Consideriamo $2^{k+2} + 1$. Possiamo riscriverlo come:

$$2^{k+2} = 2^k \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^k$$

Quindi:

$$2^{k+2} + 1 = 4 \cdot 2^k + 1$$

Ora usiamo che $4 = 3 + 1$, quindi:

$$4 \cdot 2^k + 1 = 3 \cdot 2^k + 2^k + 1$$

Per l'ipotesi induttiva, sappiamo che $2^k + 1$ è divisibile per 3, quindi $2^{k+2} + 1$ è anch'esso divisibile per 3, poiché è uguale a somma di due numeri divisibili per 3.

(v) **Passo base:** Per $n = 3$, sappiamo che un triangolo non ha diagonali, quindi il numero di diagonali è 0. Calcoliamo la formula:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$$

Quindi la formula è corretta per $n = 3$.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un poligono con $n = k$ lati, ovvero che il numero di diagonali sia dato da:

$$\frac{k(k-3)}{2}$$

Dobbiamo dimostrare che la formula è valida anche per un poligono con $n = k + 1$ lati. Consideriamo un poligono con $k + 1$ lati. Aggiungendo un nuovo vertice al poligono con k lati, il nuovo vertice può essere collegato a tutti gli altri k vertici tranne che ai suoi due vertici adiacenti, quindi può aggiungere $k - 2$ nuove diagonali. Oltretutto un lato del poligono con k lati diventerà esso stesso una diagonale nel poligono con $k + 1$ lati.

Il numero totale di diagonali del poligono con $k + 1$ lati sarà quindi:

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1$$

Espandiamo e semplifichiamo:

$$\frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k(k-3) + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2}$$

Dobbiamo ora verificare se questa espressione è uguale alla formula per $n = k + 1$, cioè $\frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}$. Calcoliamo:

$$\frac{(k+1)(k+1-3)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = \frac{k^2 + k - 2k + 2}{2} = \frac{k^2 - k + 2}{2}$$

Questa è la stessa espressione ottenuta prima, quindi la formula è valida anche per $n = k + 1$.

- (vi) **Passo base:** Per $n = 3$ (triangolo), sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è π (ovvero 180°). Verifichiamo la formula:

$$(n-2)\pi = (3-2)\pi = \pi$$

Quindi, la formula è corretta per $n = 3$.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un poligono con $n = k$ lati, cioè supponiamo che la somma degli angoli interni di un poligono con k lati sia $(k-2)\pi$.

Dobbiamo dimostrare che la formula è valida anche per un poligono con $k + 1$ lati. Consideriamo un poligono con $k + 1$ lati. Possiamo dividere questo poligono in un poligono con k lati e un triangolo aggiungendo una diagonale tra due vertici non adiacenti.

Per l'ipotesi induttiva, sappiamo che la somma degli angoli interni del poligono con k lati è $(k-2)\pi$. Poiché il triangolo aggiunto ha una somma degli angoli interni pari a π , la somma totale degli angoli interni del poligono con $k + 1$ lati sarà:

$$(k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi$$

Ora verifichiamo che questa espressione corrisponda alla formula per $n = k + 1$:

$$(n-2)\pi = ((k+1)-2)\pi = (k-1)\pi$$

Quindi, la formula è valida anche per $n = k + 1$.

- (vii) **Passo base:** Per $n = 0$, l'insieme X è l'insieme vuoto, $\emptyset$. L'insieme delle parti di $\emptyset$ è $\{\emptyset\}$, che contiene solo l'insieme vuoto, quindi ha cardinalità 1. Verifichiamo la formula:

$$2^n = 2^0 = 1$$

Quindi, la formula è corretta per $n = 0$.

Passo induttivo: Supponiamo che la formula sia vera per un insieme X con $n = k$ elementi, cioè supponiamo che l'insieme delle parti di X abbia cardinalità 2^k .

Dobbiamo dimostrare che la formula è valida anche per un insieme X con $k + 1$ elementi. Supponiamo che X abbia $k + 1$ elementi e consideriamo un elemento aggiuntivo $x \notin X$.

Ogni sottoinsieme dell'insieme X con $k + 1$ elementi può essere ottenuto in uno dei seguenti due modi: 1. È un sottoinsieme di X (con k elementi). 2. È un sottoinsieme di X con l'elemento aggiuntivo x .

Perciò, possiamo ottenere tutti i sottoinsiemi di X con $k + 1$ elementi prendendo ciascun sottoinsieme di X con k elementi e aggiungendo o non aggiungendo l'elemento x . Questo significa che per ogni sottoinsieme di X (che ha cardinalità 2^k per l'ipotesi induttiva), ci sono due corrispondenti sottoinsiemi del nuovo insieme: uno che include x e uno che non lo include.

Quindi, il numero totale di sottoinsiemi di X con $k + 1$ elementi è:

$$2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Esercizio 4. I numeri di Fibonacci sono definiti in maniera ricorsiva nel seguente modo: definiamo $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ e in generale $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$. I primi 10 numeri di Fibonacci sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni riguardo i numeri di fibonacci.

(i) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1$. Supponiamo $n = 1$:

allora l'equazione diventa $f_1 = f_3 - 1$, che è verificata dal momento in cui $f_1 = 1$ e $f_3 = 2$. Vogliamo mostrare che $f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$, quindi $f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = (f_{n+1} + f_{n+2}) - 1 = f_{n+3} - 1$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(ii) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^n f_k^2 = f_n f_{n+1}$. Supponiamo $n = 1$:

allora l'equazione diventa $f_1^2 = f_1 f_2$, che è verificata dal momento in cui $f_1 = f_2 = 1$. Vogliamo mostrare che $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{n+1} f_{n+2}$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$, quindi $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1} (f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(iii) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^n f_{2k-1} = f_{2n}$. Supponiamo $n = 1$:

allora l'equazione diventa $f_1 = f_2$, che è verificata dal momento in cui $f_1 =$

$f_2 = 1$. Vogliamo mostrare che $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} + f_{2(n+1)-1} = f_{2(n+1)}$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$, quindi $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} + f_{2(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2(n+1)-1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2(n+1)}$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(iv) L'equazione può essere riscritta come $\sum_{k=1}^n f_{2k} = f_{2n+1} - 1$. Supponiamo

$n = 1$: allora l'equazione diventa $f_2 = f_3 - 1$, che è verificata dal momento in cui $f_2 = 1$ e $f_3 = 2$. Vogliamo mostrare che $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2(n+1)+1} - 1$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$, quindi $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2n+1} - 1 + f_{2(n+1)} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 = f_{2n+3} - 1 = f_{2(n+1)+1} - 1$. Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 1$.

(v) Supponiamo $n = 0$: per definizione $f_0 = 0$, d'altro canto $\frac{(1 + \sqrt{5})^0 + (1 - \sqrt{5})^0}{2^0 \sqrt{5}} =$

$\frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0$. Vogliamo mostrare che $f_{n+1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} + (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}}$.

Adesso $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Per ipotesi induttiva possiamo supporre $f_{n-1} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}}$ e $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$, quindi

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} + \frac{(1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} = \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{5})^{n-1} + 2(1 - \sqrt{5})^{n-1} + (1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} = \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{5})^{n-1} + 2(1 - \sqrt{5})^{n-1} + (1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 - \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^n \sqrt{5}} = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 - \sqrt{5})^{n-1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}(1 + \sqrt{5})^{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} = \\ &= \frac{(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} \end{aligned}$$

Ora notiamo che $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ sono le soluzioni dell'equazione $x + 1 =$

x^2 , questo vuol dire che $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$ e $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 =$

$\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2$. Concludiamo che

$$f_{n+1} = \frac{(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(1 + \sqrt{5})^{n-1} + (1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2})(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2(1+\sqrt{5})^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}} = \\ & \frac{(1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^{n-1} + (1-\sqrt{5})^2(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2^2 \cdot 2^{n-1}\sqrt{5}} = \\ & \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} + (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Grazie al principio di induzione concludiamo che l'equazione di partenza è valida per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 5. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente/inferiormente, in caso affermativo calcolare l'estremo superiore/inferiore, e stabilire se si tratta di un massimo/minimo.

(i) Procediamo per passi.

- 1) $\frac{n-1}{n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$, e $\frac{n-1}{n} = 0$ quando è $n = 1$, quindi 0 è il minimo.
- 2) $\frac{n-1}{n} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non il massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\frac{n-1}{n} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

(ii) Procediamo per passi.

- 1) $\frac{2n}{n^2+1} \geq -1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\frac{2n}{n^2+1} = -1$ quando è $n = -1$, quindi -1 è il minimo.
- 2) $\frac{2n}{n^2+1} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e $\frac{2n}{n^2+1} = 1$ quando è $n = 1$, quindi 1 è il massimo.

(v) Le soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2+2} \leq x+3$ sono $x \in \left[-\frac{7}{6}; \infty\right)$, quindi il minimo dell'insieme è $-\frac{7}{6}$ e l'insieme è illimitato superiormente.

(vi) Le soluzioni della disequazione $\frac{x^2-5x+6}{x^3-1} > 0$ sono $x \in (-\infty; 3) \cup (-1; 2)$, quindi l'insieme è illimitato inferiormente e 2 è il sup ma non il massimo dell'insieme.

(vii) Le soluzioni della disequazione $|x-5x^2+3| \leq 2x$ sono $x \in \left[\frac{\sqrt{61}-1}{10}; \frac{\sqrt{69}+3}{10}\right]$,

quindi il minimo dell'insieme è $\frac{\sqrt{61}-1}{10}$ e il massimo dell'insieme è $\frac{\sqrt{69}+3}{10}$.

Esercizio 6. Dato l'insieme $A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}$, dimostrare che $\sup A = 1$, $\inf A = -1$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi:

- 1) $(-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} < 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}}$ con n pari (se n è dispari la disequazione non è soddisfatta).
- 2) $(-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} > -1$ per ogni $n \geq 1$, quindi -1 è un minorante ma non un minimo. Dimostriamo che -1 è l'inf: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $(-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \leq -1 + \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $n \geq \sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}}$ con n dispari (se n è pari la disequazione non è soddisfatta).

Esercizio 7. Dato l'insieme $B = \left\{ \frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} : x \in \mathbb{R}_{\geq 1} \right\}$, dimostrare che $\sup B = 1$, $\inf B = 0$ e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

Procediamo per passi.

- 1) $\frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} \geq 0$ per ogni $x \geq 1$, oltretutto $\frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} = 0$ per $x = 1$, quindi 0 è il minimo.
- 2) $\frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} < 1$ per ogni $x \geq 1$, quindi 1 è un maggiorante ma non un massimo. Dimostriamo che 1 è il sup: preso $\varepsilon > 0$ piccolo, la disequazione $\frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} \geq 1 - \varepsilon$ ammette soluzioni, ovvero $x \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2}}{2\varepsilon - \varepsilon^2}$ (notare che se scegliamo ε piccolo allora risulta $2\varepsilon > \varepsilon^2$).