Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 2

Esercizio 1.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1-n+1}{n\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\big)} = \dfrac{2}{\infty} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^5+(n-1)^5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^6+6n^5+...)-(n^6-6n^5+...)}{(n^5+...)+(n^5-...)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n^5+...}{2n^5+...} = \dfrac{12}{2} = 6$ (con i puntini stiamo indicando polinomi in n di grado strettamente minore di 5)

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(e^{\frac{2}{n}}-1\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}} = 2\cdot 1 = 2$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^5+1} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\log\left(\sqrt[n]{2n^5+1}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)}$, ora notiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\log(2n^5+1) = 0$ poiché il logaritmo di un polinomio $p(x)$ cresce più lentamente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, quindi $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log(2n^5+1)} = e^0 = 1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \big[n\log(n-1)-(n-e^{-n})\log n\big] = \lim\limits_{n\to\infty} \big[n\log(n-1) - n\log n + e^{-n}\log n)\big] = \lim\limits_{n\to\infty} n\log\left(\dfrac{n-1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\log n = \lim\limits_{n\to\infty} \log\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n +$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \log(e^{-1}) = -1$$

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}-\cos n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2}$, ora notiamo che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} = \infty$ poiché l'esponenziale di un polinomio $p(x)$ cresce più velocemente di un qualsiasi polinomio $q(x)$, oltretutto notiamo che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$ poiché $\cos n$ è una quantità che oscilla tra -1 e 1 (e quindi è limitata) mentre $n^2 \to \infty$ per $n \to \infty$, quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n^2} - \frac{\cos n}{n^2} = \infty - 0 = \infty$

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n \overset{m=n+2}{=} \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-2} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right)^{-2} = e \cdot 1 = e$

8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2}\right)^{n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{n^2}\right)^{n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \frac{\log n}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^{\frac{\log n}{2n}} = e^0 = 1$

9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log n^{\frac{1}{\log n}}} = e$

10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+1) - 2\log n}{\log(n^5+3) - 5\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\log(1+\frac{3}{n^5})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\log(1+\frac{3}{n^5})} \cdot \frac{\frac{3}{n^5}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^5}} =$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1+\frac{3}{n^5})} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{\frac{3}{n^5}}{\log(1+\frac{3}{n^5})} \cdot \frac{n^3}{3} =$
$1 \cdot 1 \cdot \infty = \infty$

11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-5n}}{\log(1+\sqrt{3}e^{-5n})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}e^{-5n}}{\log(1+\sqrt{3}e^{-5n})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{5}{n}} \sqrt[n]{2^n+5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1+(\frac{2}{5})^n}}{(\sqrt[n]{n})^5} = 5$

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-7)^n + n^{n-2}}{4n^n - 5n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n(1-\frac{7}{n})^n + \frac{n^n}{n^2}}{n^n(4-5\frac{n!}{n^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{7}{n})^n + \frac{1}{n^2}}{4-5\frac{n!}{n^n}} = \frac{e^{-7}+0}{4-0} = \frac{e^{-7}}{4}$

14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2^n)^{\frac{1}{n}}}{(n+e^{-n})\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(\frac{n^2}{2^n}+1)^{\frac{1}{n}}}{n(1+\frac{e^{-n}}{n})\log n} = \frac{2}{\infty} = 0$

15. $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(\sqrt[n]{7^n+5^n}-7\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(7\sqrt[n]{1+\left(\frac{5}{7}\right)^n}-7\right) =$

$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(\sqrt[n]{1+\left(\frac{5}{7}\right)^n}-1\right) = 7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(e^{\log \sqrt[n]{1+(\frac{5}{7})^n}}-1\right) =$

$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1\right) =$

$7\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{7}{5}\right)^n \left(e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1\right) \cdot \frac{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)} =$

$7\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)}-1}{\frac{1}{n}\log(1+(\frac{5}{7})^n)} \cdot \frac{\log(1+(\frac{5}{7})^n)}{\left(\frac{5}{7}\right)^n} \cdot \frac{n}{n} = 7\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 7$

16. $\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5+10n^3-2n+1}{12n^4-8n^5-2n^2+n-9} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^5}{-8n^5} = -\frac{7}{8}$

17. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+n^{\frac{2}{3}}+7n^{\frac{5}{4}}-3\sqrt{n}+9n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{8}{7}}+2n^{\frac{3}{2}}-3n^{\frac{1}{5}}+5n^{\frac{9}{8}}-100n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^{\frac{3}{2}}}{2n^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{2}$

18. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-2}-\sqrt{n^2+1}}{1-n} \cdot \frac{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2-n^2-1}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-3}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3(n-1)(n+1)}{(1-n)\left(\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}\right)} = -3\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{4n^2-2}+\sqrt{n^2+1}} =$

$-3\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = -3\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$

$-3\cdot \frac{1+0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{3}{3} = -1$

19. $\lim_{n\to\infty} (n-n\arctan(3e^n))(\log(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (1-\arctan(3e^n))\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} =$

$\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = 1-\frac{\pi}{2}$

20. $\lim_{n\to\infty} 3^{n+1}-3^{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{n+1-\sqrt{n^2+1}}-1) = \lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{\frac{(n+1)^2-(n^2+1)}{n+1+\sqrt{n^2+1}}}-1) =$

$\lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n^2+1}}(3^{\frac{2n}{n(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})}}-1) = \infty\cdot 8 = \infty$

21. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3\cdot 1 = 3$

22. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log n)^2+2\log(n)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\log n\sqrt{(1+\frac{2}{\log n})}}}{n^2+1} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log n \log 2}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2-\log 2}} = \frac{1}{\infty} = 0$

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{10^{\sqrt{(\log n)^2+\log(n^2)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\sqrt{(\log n)^2+2\log(n)}}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{\log n\sqrt{(1+\frac{2}{\log n})}}}{n^2+1} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\log n \log 10}}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} n^{\log 10-2} = \infty$

24. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log(\sqrt[n]{2}-1)} = e^{-\infty} = 0$

Esercizio 2.

Soluzione 1: Dall'esercizio 4.v del tutorato 1 sappiamo che $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ per ogni $n \geq 0$. Calcoliamo quindi il limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}{\dfrac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{5}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{5}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n} \cdot \frac{1-\dfrac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}}}{1-\dfrac{(1-\sqrt{5})^n}{(1+\sqrt{5})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1} \cdot \frac{1-0}{1-0} =$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Soluzione 2: Supponiamo dapprima che tale limite esista per derivare euristicamente tale valore, chiamiamo $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, abbiamo che:

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

Se denotiamo con $r = \lim_{n\to\infty} r_n$, esso deve quindi soddisfare

$$r = 1 + \frac{1}{r} \implies r^2 - r - 1 = 0 \implies r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dove abbiamo scartato la soluzione negativa dell'equazione di secondo grado perché r è il limite di una successione positiva; tale valore è ben noto come sezione aurea. Per mostrare rigorosamente che tale valore è effettivamente il limite (dal momento che per derivarlo abbiamo supposto che esso esista) stimiamo $|r_{n+1} - r|$:

$$|r_{n+1}-r| = \left|1 + \frac{1}{r_n} - \left(1 + \frac{1}{r}\right)\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{r_n - r}{r_n}\right| < \frac{1}{r}|r_n - r| < \frac{1}{r^n}|r_1 - r| \longrightarrow 0$$

Dove abbiamo reiterato la stima su $|r_n - r|$ e abbiamo usato che $r > 1$ nel passaggio a limite.