Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 3

Esercizio 1.

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{-1}\right)^2=e^{-2}$

2. $\lim_{n\to\infty}n^2(2e^{\frac{\ln n}{n}}-2)=\lim_{n\to\infty}2n^2(e^{\frac{\ln n}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}2n^2\cdot\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\frac{\ln n}{n}}\cdot\frac{\ln n}{n}=2\lim_{n\to\infty}n\cdot 1\cdot\ln n=2\lim_{n\to\infty}n\ln n=\infty$

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{n^5}\right)}{2\log\left(n^6+n^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^{-5})}{2\log[n^6(1+n^{-4})]}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5\log n}{2\log(n^6)+2\log(1+n^{-4})}=-\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{6\log n+\log(1+n^{-4})}=-\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n\left(6+\frac{\log(1+n^{-4})}{\log n}\right)}=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot(6+\frac{0}{\infty})}=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{5}{12}$

4. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{-1}{+\infty+\infty}=0$

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}-\frac{\log\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}(-\sin\left(\frac{1}{n}\right))}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}{\frac{1}{n}(1+n\sin\left(\frac{1}{n}\right))}=1$$

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n^4+1}\right)}{1-\cos(n^{-2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n^4+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=0$

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(ne^{-2n}\right)+n\sqrt{10-10\cos(e^{-2n})}}{\sin\left((2n+1)e^{-2n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(ne^{-2n})\frac{\tan\left(ne^{-2n}\right)}{(ne^{-2n})}+n\sqrt{10}\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{((2n+1)e^{-2n})\frac{\sin\left((2n+1)e^{-2n}\right)}{((2n+1)e^{-2n})}}=$ $\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-2n}+n\sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}\frac{\sqrt{1-\cos(e^{-2n})}}{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2n}}}{(2n+1)e^{-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-2n}[1+\sqrt{10}\frac{\sqrt{2}}{2}]}{ne^{-2n}(2+\frac{1}{n})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2+0}=$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Esercizio 2.

1. $\lim_{x\to-2}\frac{e^{2x+4}-1}{x+2}\overset{y=x+2}{=}\lim_{y\to0}\frac{e^{2y}-1}{y}=2\lim_{y\to0}\frac{e^{2y}-1}{2y}=2\cdot1=2$

2. $\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{\sin(3x)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2x}}{2x}\frac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}}=\frac{2}{3}$

3. $\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{1-e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{9x^2}9x^2\frac{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}{1-e^{\frac{\ln(1-x^2)}{2}}}\frac{2}{\ln(1-x^2)}=$ $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot9x^2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{\ln(1-x^2)}=-9\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{\ln(1-x^2)}=-9\cdot1=-9$

4. $\lim_{x\to0}\frac{\log(1-4x)}{x}=-4\lim_{x\to0}\frac{\log(1-4x)}{-4x}=-4$

5. $\lim_{x\to0}\frac{\arctan(2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

6. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3+3x)-\log(3)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3(1+x))-\log(3)}=$ $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(3)+\log(1+x))-\log(3)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(1+x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\log(1+x)}\frac{x}{2x}=$ $2\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{x}{\log(1+x)}=2\cdot1\cdot1=2$

7. $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\sin x\ln x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{\sin x}{x}x\ln x}=\lim_{x\to0^+}e^{-x\ln x}$ e ricordando che per le gerarchie di infinitesimi abbiamo $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$ possiamo scrivere $\lim_{x\to0^+}e^{-x\ln x}=e^0=1$

8. $\lim_{x\to 0^+} \left(1+e^{\frac{1}{x^3}}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\sin x}{x^3}} (\frac{1}{e^{\frac{1}{x^3}}}+1)^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} \cdot 1 = +\infty$

9. Notiamo che $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x = 0$ quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x)}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1} =$ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x)}{e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - x\ln x}{(1+x)^{-\frac{1}{x^2}}-1} \overset{\frac{1}{x}=y}{=}$ $\lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y} - \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y^2}-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y^2\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}}}-1} =$ $\lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y} + \frac{\ln y}{y}}{e^{-y}-1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$

10. $\lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(\frac{x^2+\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln|x|}} - 1\right] = \lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln|x|}} - 1\right] =$ $\lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{\ln|x|}\frac{1}{x^2}} - 1\right] = \lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[e^{\frac{1}{x^2}} \frac{\left(1+\frac{\ln|x|}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{\ln|x|}\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}} - 1\right] =$ $\lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[e^{\frac{1}{x^2}} - 1\right] = \lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to -\infty} x^2 \arctan(x) \left[1 \cdot \frac{1}{x^2}\right] =$ $\lim_{x\to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

11. $\lim_{x\to -\pi^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{x+\pi}))}{(x+\pi)^{-\frac{1}{x+\pi}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{t}))}{(t)^{-\frac{1}{t}}}$, facendo la sostituzione $t = x+\pi$. Ora $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(\sinh(\frac{1}{t}))}{(t)^{-\frac{1}{t}}} = \lim_{z\to +\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{(\frac{1}{z})^{-z}}$ facendo una seconda sostituzione $z = \frac{1}{t}$. $\lim_{z\to +\infty} \frac{\sin(\sinh(z))}{(\frac{1}{z})^{-z}} = \lim_{z\to +\infty} \frac{\sin(\frac{e^z - e^{-z}}{2})}{z^z} = 0$ poichè il seno è una funzione che oscilla mentre z^z è una funzione che cresce all'infinito.

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{6\cos x - x}{2\tan(\frac{1}{x}) + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6\cos x}{x} - 1}{\frac{2\tan(\frac{1}{x})}{x} + 2} = -\frac{1}{2}$

13. $\lim_{x\to 0^+} (\log(e+x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (1+\log(1+\frac{x}{e}))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+\log(1+\frac{x}{e}))}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+\frac{x}{e})}{x}} = e^{\frac{1}{e}}$

14. Poniamo $y = \log x$, otteniamo

$$(\log\log x)^{\log x} - x(\log x)^{\log\log x} = (\log y)^y - e^y y^{\log y} = e^{y\log\log y} - e^y e^{(\log y)^2} =$$

$$= e^{y\log\log y}(1 - e^{y+(\log y)^2 - y\log\log y}) = e^{y\log\log y}(1 - e^{y(1+\frac{(\log y)^2}{y} - \log\log y)}) = +\infty \cdot (1 - e^{-\infty}) = +\infty$$

15. $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\cos(x-\frac{\pi}{2})}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1-x)}{\sin x}} = \frac{1}{e}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{\log(1+\sin^4 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{3\arctan(x) + (1-\cos 2x)\sin^{21} x}{27x^{45} + 5\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\arctan x}{x} + \frac{(1-\cos 2x)\sin^{21} x}{x}}{27x^{44} + 5\frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{5}$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 5x)\tan 3x}{(\sin x - x^3)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{25x^2}{2}\cdot 3x}{x^3(\frac{\sin x}{x} - x^2)^3} = \frac{75}{2}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi + \pi\cos x - \pi)}{x^2\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(\pi(1-\cos x))}{x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin(\pi(1-\cos x))}{\pi(1-\cos x)} \frac{\pi(1-\cos x)}{x^2} = -\frac{\pi}{2}$

20. $\lim_{x\to\infty} xe^x \sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right) = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{e^{-x}\sin\frac{2}{x}} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2$

21. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x(e^{\cos x} - 1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x\cos x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

22. $\lim_{x\to 0}(\sin x^2)^{\frac{1}{\log_{13}(x^2)}} = \lim_{x\to 0} 13^{\frac{\log_{13}\sin x^2}{\log_{13} x^2}} = 13$ (dove abbiamo usato che $\sin x^2 \sim x^2$ per $x \to 0$)

Esercizio 3. Se $\alpha = 0$ la successione è costantemente nulla, pertanto il suo limite è 0. Se $\alpha \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\alpha\log\frac{n+1}{n}} - 1}{\alpha\log\frac{n+1}{n}} \frac{\alpha\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \alpha$$

Quindi abbiamo che per ogni α reale tale limite vale α.