

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 4

Esercizio 12. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Simmetrie: Pari
- Segno: $x^4 - 3x^2 + 2 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$
- Asintoti: Non ci sono asintoti verticali perché il dominio è tutto $\mathbb{R}$ e non ci sono asintoti orizzontali perché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, neanche asintoti obliqui perché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = 4x^3 - 6x \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$, quindi i punti critici sono $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ e 0, i primi due sono punti di minimo mentre l'origine è punto di massimo.

Esercizio 13. $f(x) = x^x = e^{x \log x}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Segno: sempre positiva
- Asintoti orizzontali: Non ci sono poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x = +\infty$
- Asintoti verticali: Non ci sono, infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = 1$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, infatti $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{x-1} = +\infty$

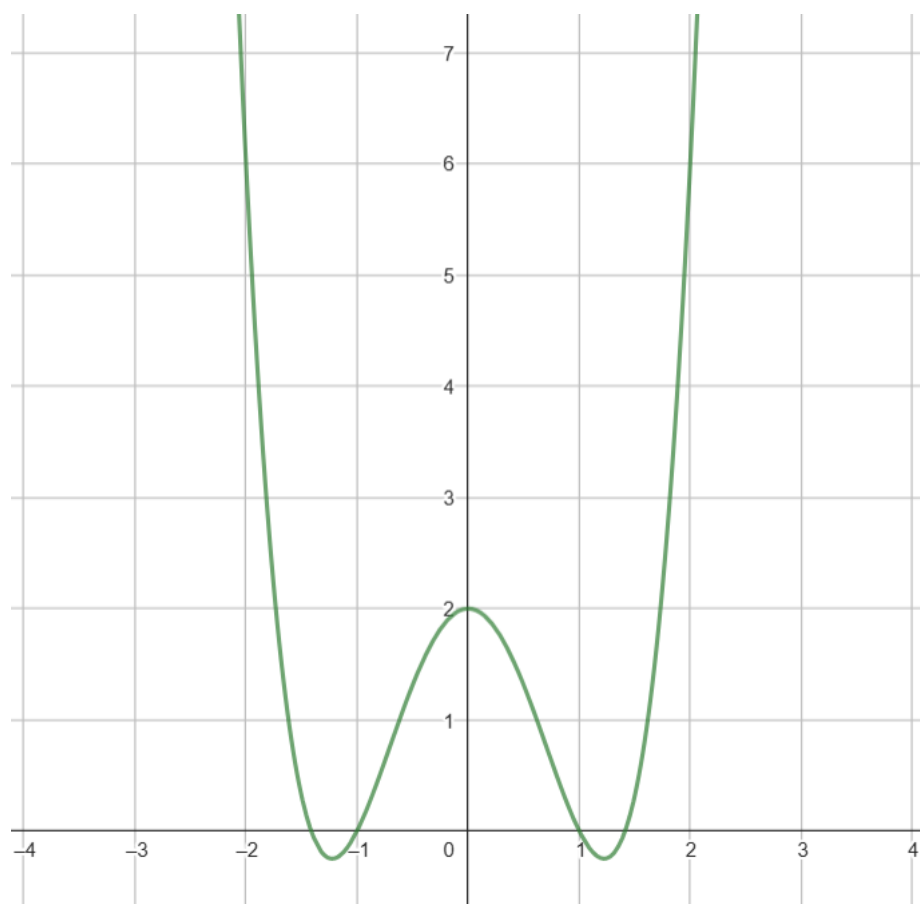


Figure 1: Esercizio 12

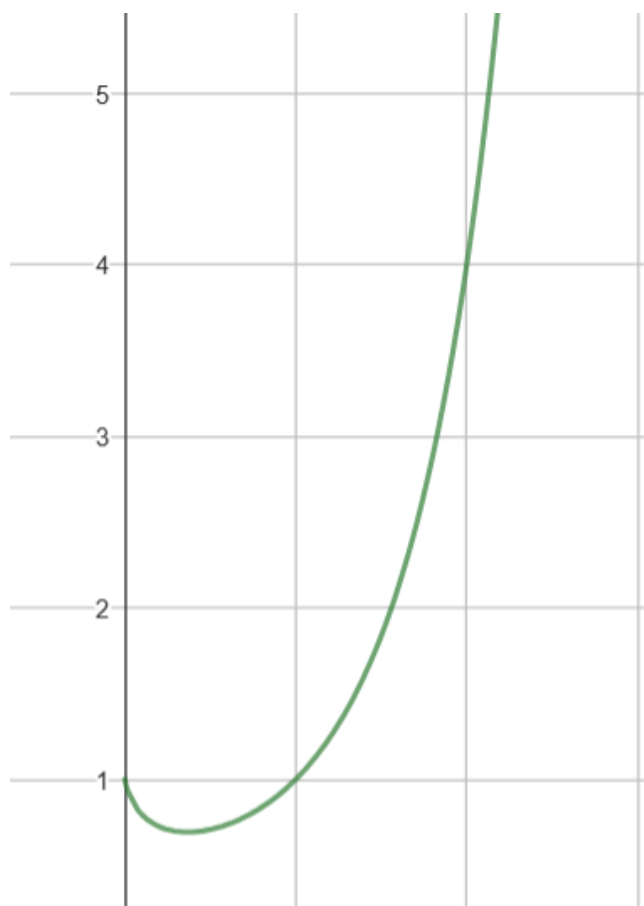


Figure 2: Esercizio 13

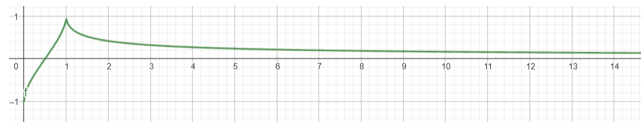


Figure 3: Esercizio 14

- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = e^{x \log x} (\log x + 1) \geq 0 \iff x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$, quindi l'unico punto critico è $\frac{1}{e}$ ed è un punto di minimo.

Esercizio 14. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{|x-1|}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Segno: $f(x) > 0 \iff x > \frac{1}{2}$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (quindi l'asse x è un asintoto)
- Asintoti verticali: Non ci sono, infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché c'è quello orizzontale.
- Derivata prima e punti critici: (Conviene dividere nei casi $x > 1$ e $x < 1$ per calcolare la derivata)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Si noti che in $x = 1$ la funzione non è derivabile (i limiti laterali del rapporto incrementale sono diversi, fanno il destro $-\infty$ ed il sinistro $+\infty$, questo tipo di punti si chiamano cuspidi). La derivata prima di f è sempre strettamente negativa per $x > 1$ e strettamente positiva per $0 < x < 1$, di conseguenza non abbiamo punti critici.

Esercizio 15. $f(x) = \sin\left(\frac{10}{x^2 + 1}\right)$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Simmetrie: Pari
- Segno: $f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{10}{\pi} - 1}) \cup (-\sqrt{\frac{10}{2\pi} - 1}, -\sqrt{\frac{10}{3\pi} - 1}) \cup (\sqrt{\frac{10}{3\pi} - 1}, \sqrt{\frac{10}{2\pi} - 1}) \cup (\sqrt{\frac{10}{\pi} - 1}, +\infty)$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (quindi l'asse x è un asintoto sia a $+\infty$ che a $-\infty$)
- Asintoti verticali: Non ci sono poiché il dominio è tutto $\mathbb{R}$



Figure 4: Esercizio 15

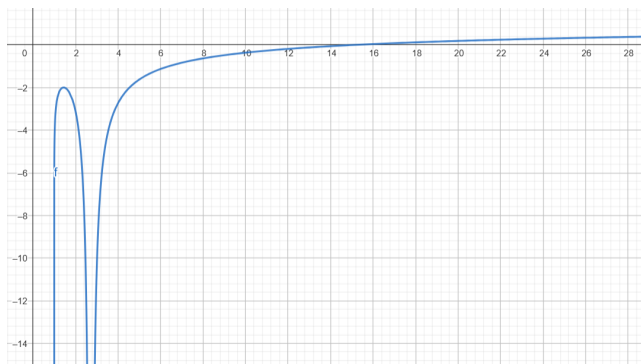


Figure 5: Esercizio 16

- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché ci sono quelli orizzontali.
- Derivata prima e punti critici: $f'(x) = -\frac{20x}{(x^2+1)^2} \cos(\frac{10}{x^2+1}) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{20-\pi}{\pi}}) \cup (-\sqrt{\frac{20-3\pi}{3\pi}}, -\sqrt{\frac{20-5\pi}{5\pi}}) \cup (0, \sqrt{\frac{20-5\pi}{5\pi}}) \cup (\sqrt{\frac{20-3\pi}{3\pi}}, \sqrt{\frac{20-\pi}{\pi}})$, i punti critici sono gli estremi degli intervalli e sono massimi o minimi alternati (cominciando con un massimo, vedi figura 4)

Esercizio 16. $f(x) = \log \log x - \frac{1}{|\log \log x|}$

- Dominio: $(1, e) \cup (e, +\infty)$
- Segno: $f(x) > 0 \iff x \in (e^e, +\infty)$
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, quindi non abbiamo asintoti.
- Asintoti verticali: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow e^\pm} f(x) = -\infty$
- Asintoti obliqui: Non ci sono, poiché $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- Suggerimento: Invece di studiare la derivata prima, studiare la monotonia della funzione $g(t) = t - \frac{1}{|t|}$, dal momento che $\log \log x$ è monotona questo ci darà la monotonia di $f(x) = g(\log \log x)$ (anche nello studio del segno si poteva, volendo, cambiare variabile $t = \log \log x$ per semplificarsi i conti).

(i)

$$f(x) = (3x - x^2) e^{-x} = \frac{3x - x^2}{e^x}$$

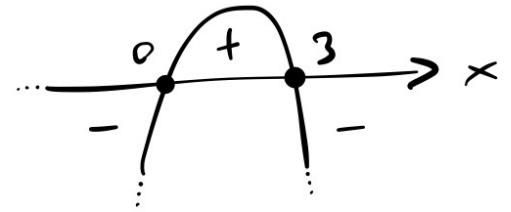
DOMINIO:

ESSENDO $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, IL DOMINIO DI $f(x)$ È $D = \mathbb{R}$

SEGNO E ZERI DI $f(x)$:

IL DENOMINATORE È SEMPRE POSITIVO, QUINDI IL SEGNO DI $f(x)$ DIPENDE INTERAMENTE DAL NUMERATORE

$$3x - x^2 \geq 0 \iff x(3 - x) \geq 0$$

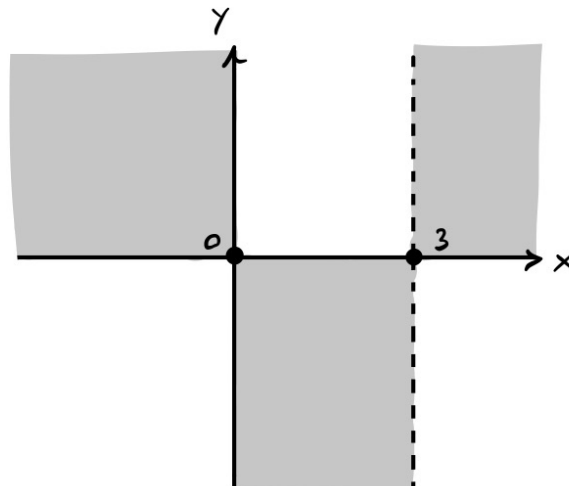


IN CONCLUSIONE

$$f(x) > 0 \iff 0 < x < 3$$

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$$

$$f(x) < 0 \iff x < 0 \vee x > 3$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2}{e^x} = 0$$

e^x CRESCe PIÙ
VELOCEMENTE DI
OGNI POLINOMIO

QUINDI $y=0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - x^2)e^{-x} = \lim_{y \rightarrow \infty} (3(-y) - (-y)^2)e^y =$$

$y = -x$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} (-3y - y^2)e^y = -\infty$$

C'È ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(-3y - y^2)e^y}{y} =$$

$y = -x$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} (-3 - y)e^y = -\infty$$

NON C'È ASINTOTO OBLIQUO SINISTRO

DERIVATA PRIMA:

$$y = (3x - x^2)e^{-x}$$

$$y' = (3 - 2x)e^{-x} + (3x - x^2)(-e^{-x}) =$$
$$= e^{-x} (3 - 2x - 3x + x^2) =$$

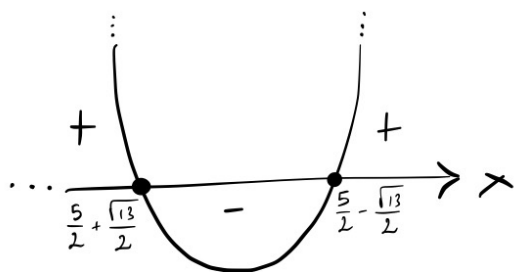
$$= \boxed{e^{-x}} (x^2 - 5x + 3)$$

> 0

IL SEGNO DI y' DIPENDE SOLO
DAL SEGNO DI $x^2 - 5x + 3$

PONIAMO $x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$



$$f'(x) \text{ CRESCE} \iff x > \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \vee x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

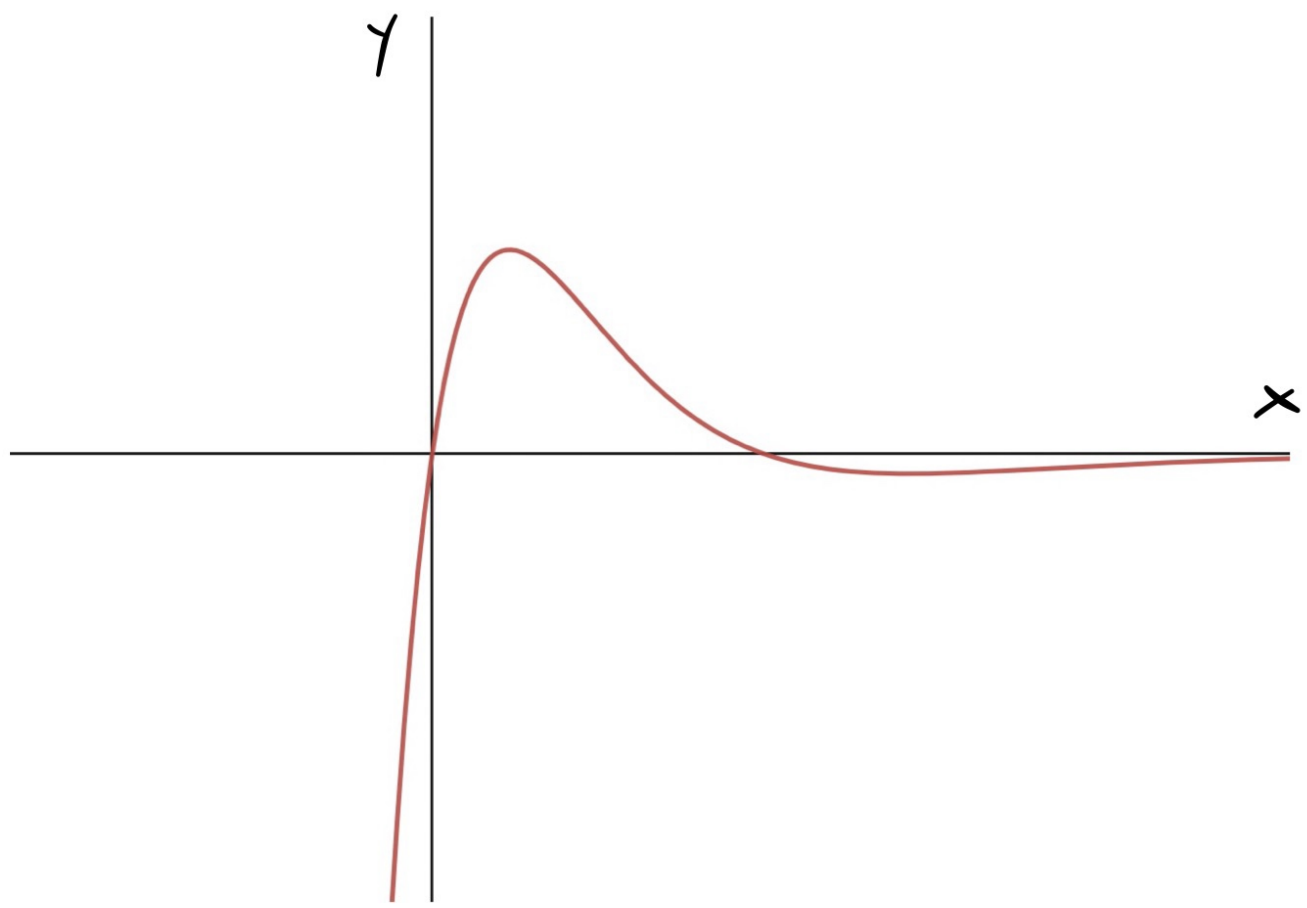
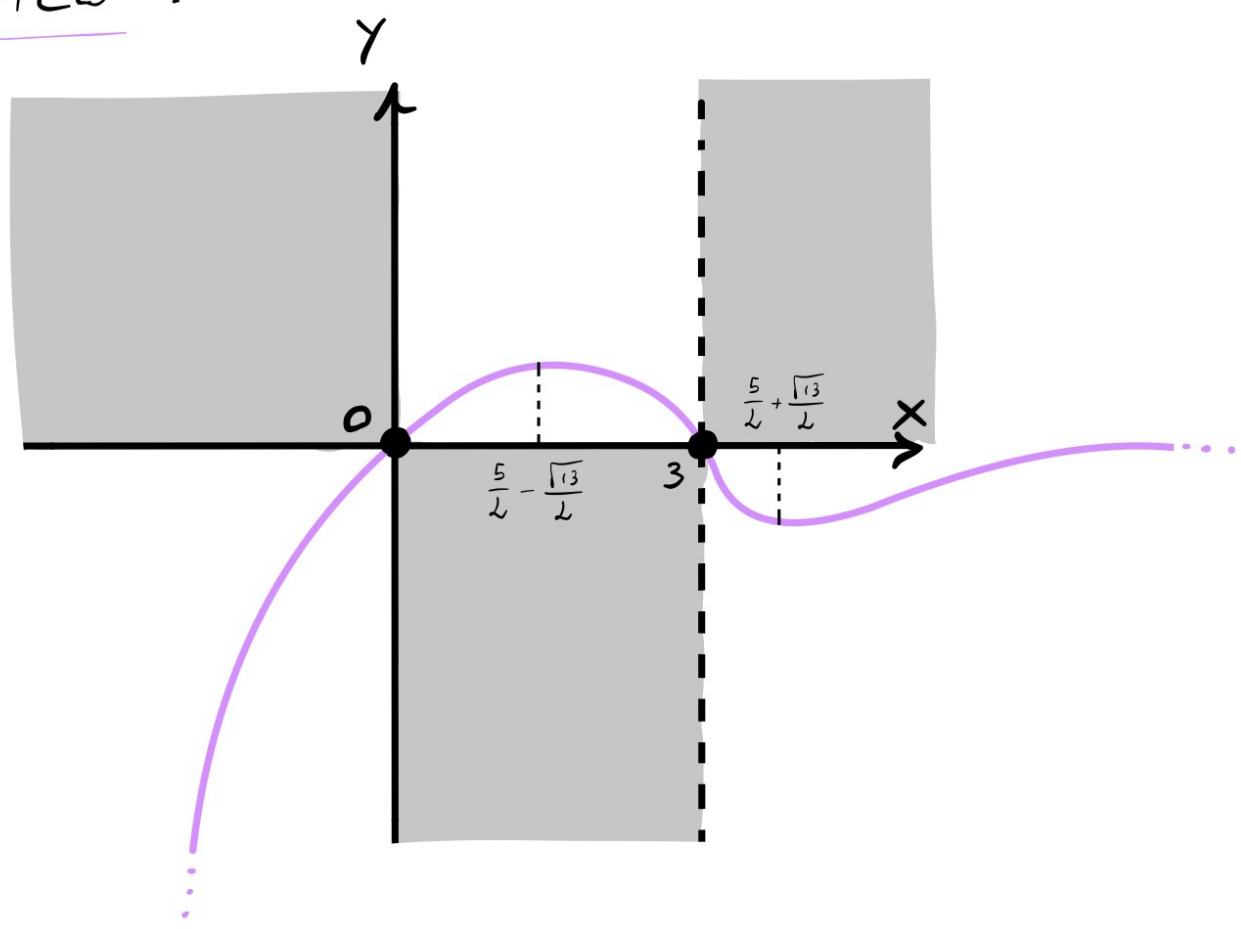
$f'(x)$ HA PUNTI STAZIONARI PER

$$x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (\text{MASSIMO ASSOLUTO}) \quad \bar{=}$$

$$\text{PER } x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (\text{MINIMO RELATIVO})$$

$$f'(x) \text{ DECRESCe} \iff \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} < x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

GRAFICO :



(ii)

$$f(x) = \frac{9(x+1)}{(x+2)^3}$$

DOMINIO:

$$(x+2)^3 \neq 0 \rightarrow x \neq -2$$

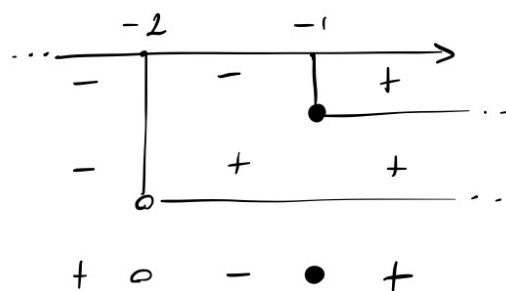
$$\text{IL DOMINIO È } D = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$$

SEGNO:

$$\text{PONIAMO } \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} \geq 0$$

$$x+1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -1$$

$$(x+2)^3 > 0 \leftrightarrow x > -2$$



INTERSEZIONI CON ASSE X:

$$y = \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} = 0 \leftrightarrow x = -1$$

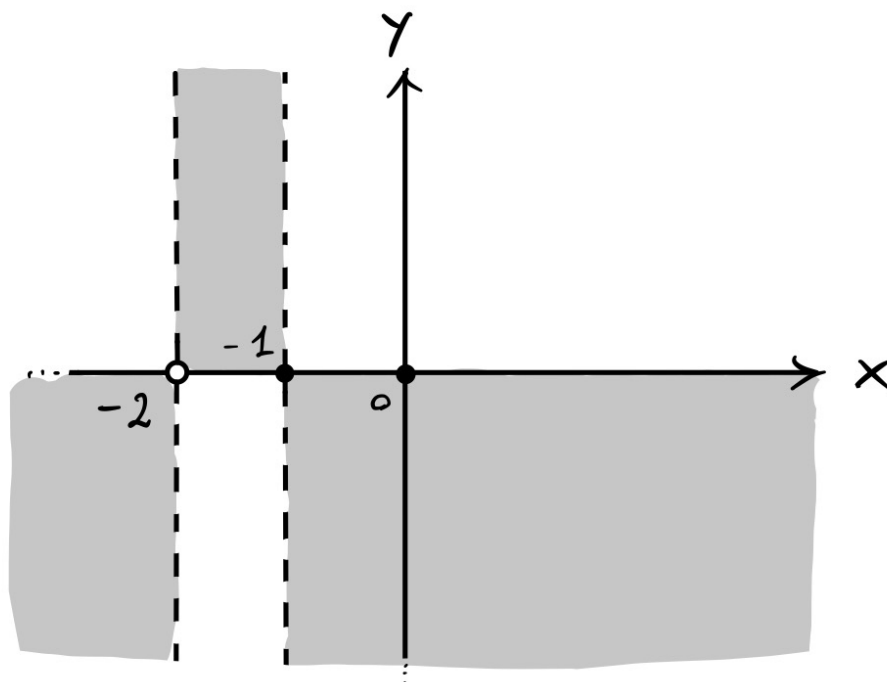
$$\text{L'INTERSEZIONE È } (x, y) = (-1, 0)$$

$\Downarrow$

$$f(x) > 0 \leftrightarrow x < -2 \vee x > -1$$

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = -1$$

$$f(x) < 0 \leftrightarrow -2 < x < -1$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} = 9 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x^3(1 + \frac{2}{x})^3} =$$

$$= 9 \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x^2(1 + \frac{2}{x})^3} = 9 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow y=0$ È ASINTOTO
ORIZZONTALE DESTRO
E SINISTRO

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{9(x+1)}{(x+2)^3} = \mp \infty$$

$\Rightarrow x=-2$ È ASINTOTO
VERTICALE

PER IL
SEGNO BASTA
GUARDARE LO
STUDIO DEL
SEGNO FATTO
IN PRECEDENZA

DERIVATA PRIMA:

$$Y = \frac{9(x+1)}{(x+2)^3}$$

$$Y' = 9 \cdot \frac{1 \cdot (x+2)^3 - (x+1) 3(x+2)^2}{(x+2)^6} =$$

$$= 3(x+2)^2 \frac{(x+2) - 3(x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 3 \frac{-2x-1}{(x+2)^4}$$

$$-2x-1 > 0 \iff x < -1/2 \wedge x \neq -2$$

$$-2x-1 = 0 \iff x = -1/2$$

$$-2x-1 < 0 \iff x > -1/2$$

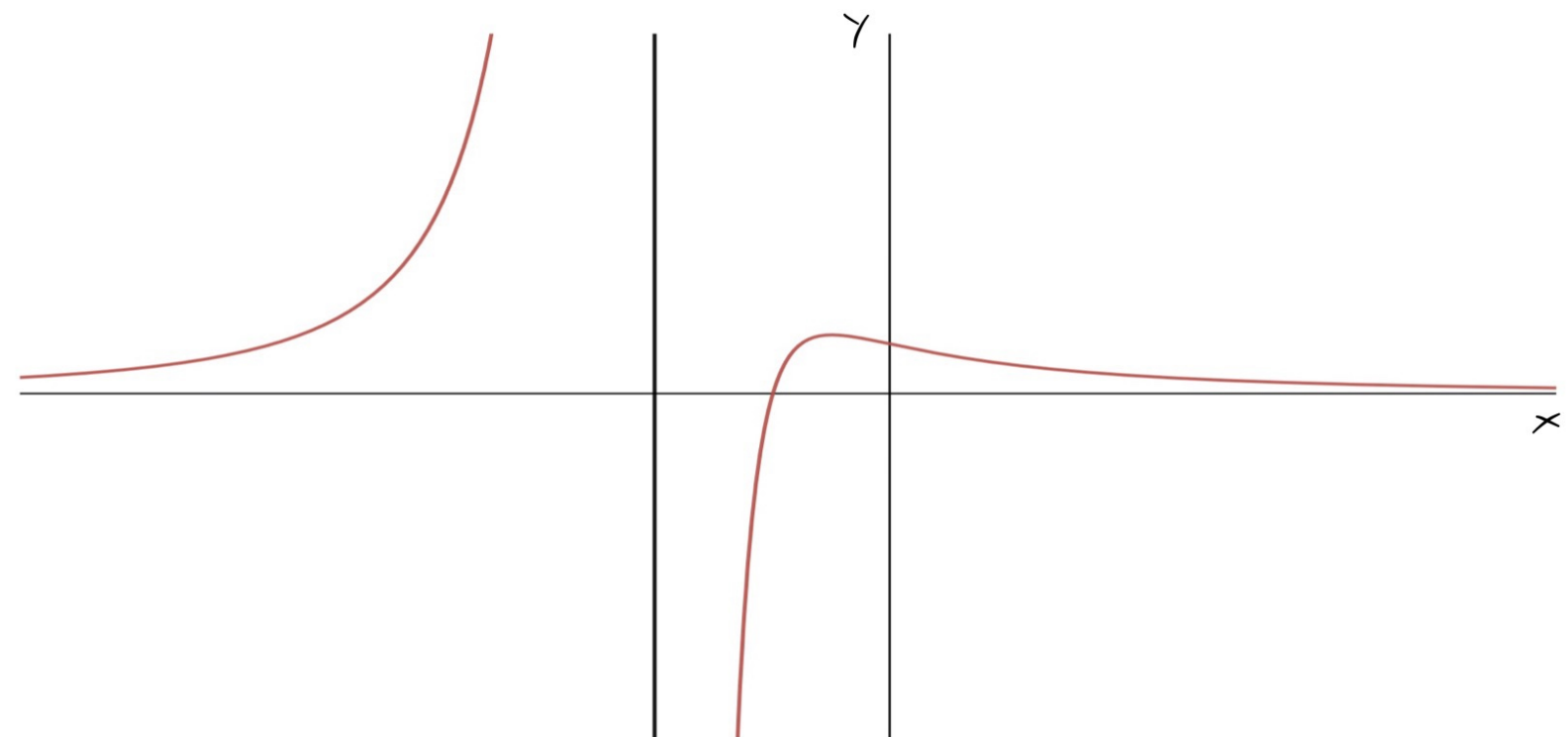
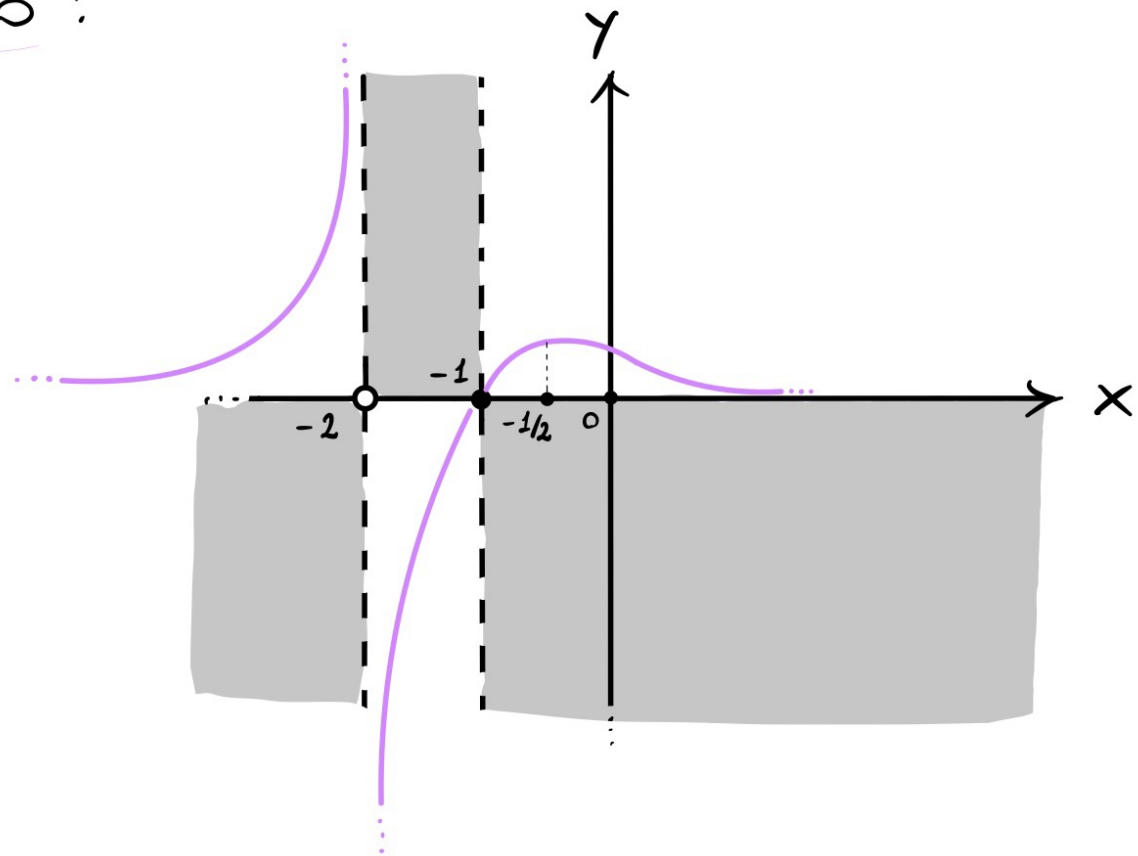


$$f(x) \text{ CRESCE} \iff x < -1/2 \wedge x \neq -2$$

$f(x)$ HA UN PUNTO STAZ. PER $x = -1/2$
(SI TRATTA DI UN MASSIMO RELATIVO)

$$f(x) \text{ DECRESCHE} \iff x > -1/2$$

GRAFICO:



(iii)

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

DOMINIO:

$$4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

IL DOMINIO È $D = [-2; 2]$

SEGNO:

LA RADICE È SEMPRE POSITIVA,
PERCIÒ IL SEGNO DI $f(x)$
DIPENDE SOLO DAL SEGNO
DEL FATTORE x ; OLTRE TUTTO

$$x\sqrt{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee 4-x^2=0$$

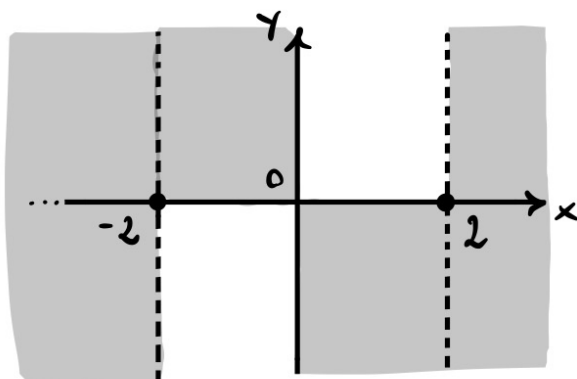
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-2$$

QUINDI

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-2$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

LA FUNZIONE È DEFINITA IN UN INSIEME COMPATTO, CIOÈ CHIUSO E LIMITATO, PERCIÒ NON È NECESSARIO STUDIARE ALCUN LIMITE

SIMMETRIA:

NOTIAMO CHE $f(x)$ È DISPARI, INFATTI

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4-(-x)^2} = -x\sqrt{4-x^2} = -f(x)$$

QUINDI IL GRAFICO SARA' SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE

DERIVATA PRIMA:

$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{4-x^2}) &= \frac{d}{dx}((4-x^2)^{\frac{1}{2}}) = (-2x) \frac{1}{2} (4-x^2)^{\frac{1}{2}-1} = \\ &= -x(4-x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\end{aligned}$$

$$y' = \sqrt{4-x^2} + x \left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \right) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

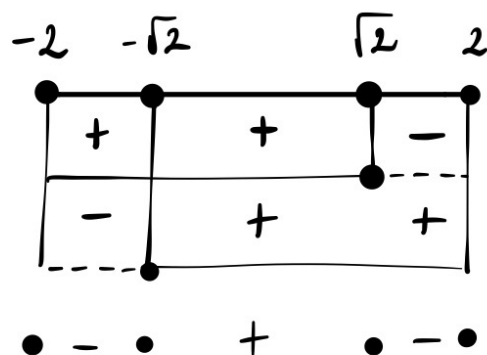
$$= 2 \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

PONIAMO

$$Y' = 2 \frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0$$

$$\sqrt{2}-x \geq 0 \iff x \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}+x \geq 0 \iff x \geq -\sqrt{2}$$



OLTRE TUTTO $Y' = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ QUINDI

$f(x)$ CRESCE $\iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$f(x)$ DECRESCe $\iff -2 \leq x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x \leq 2$

$f(x)$ HA UN MINIMO ASSOLUTO

PER $x = -\sqrt{2}$ CON VALORE $f(-\sqrt{2}) = -2$

$f(x)$ HA UN MASSIMO ASSOLUTO

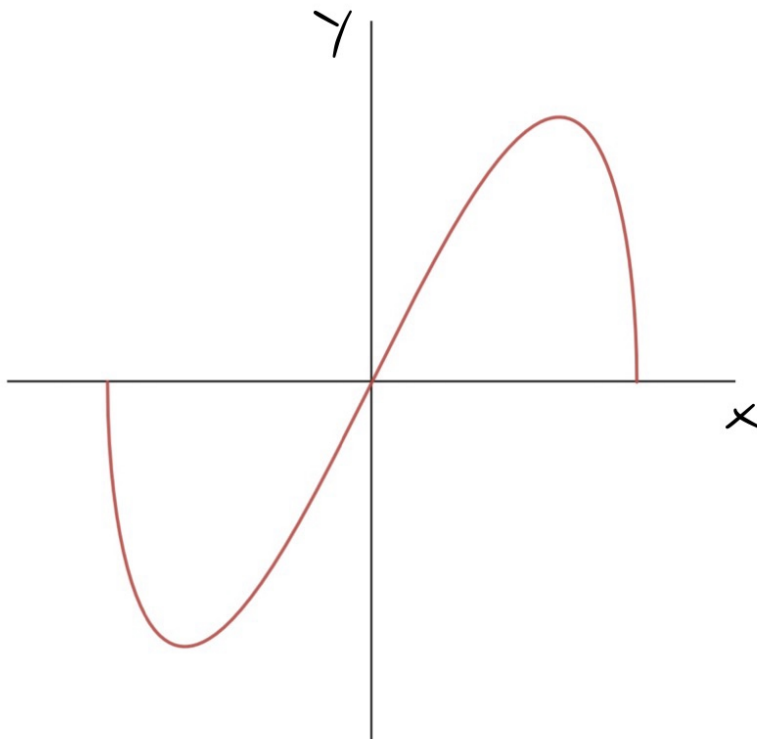
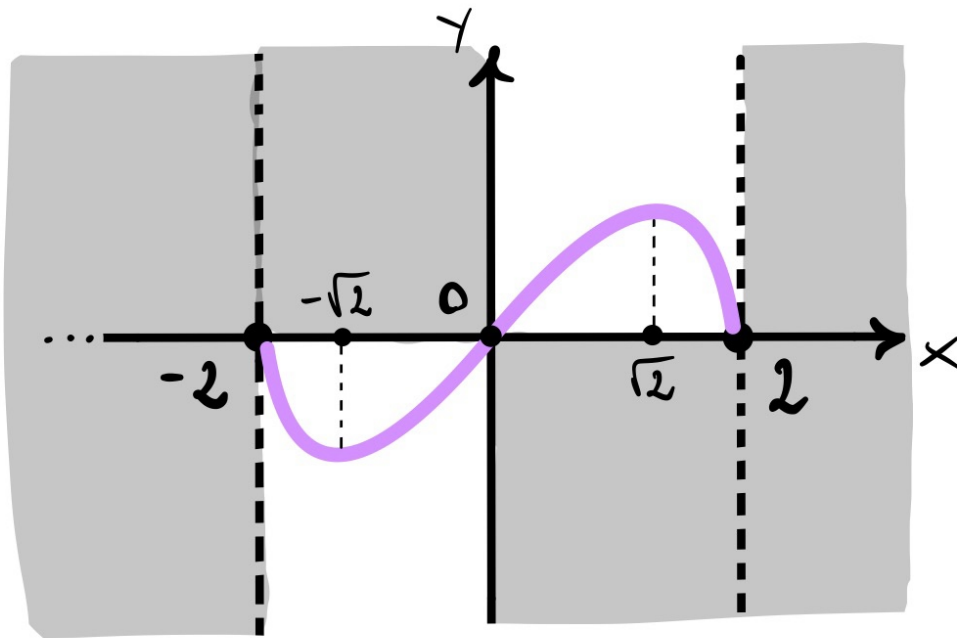
PER $x = \sqrt{2}$ CON VALORE $f(\sqrt{2}) = 2$

DA NOTARE ANCHE CHE
 $\lim_{x \rightarrow \pm 2} y' = \pm \infty$, OVVERO LE DUE

TANGENTI AL GRAFICO NEI PUNTI

$(-2; 0)$ E $(2; 0)$ SONO RETTE VERTICALI

GRAFICO:



(viii)

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)}$$

DOMINIO:

$$\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ \ln(1-x^2) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ 1-x^2 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

IL DOMINIO È $D = (-1; 0) \cup (0; 1)$

SIMMETRIE:

$f(x)$ È PARI, INFATTI

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\ln(1-(-x)^2)} = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = f(x)$$

QUINDI IL GRAFICO È SIMMETRICO
RISPETTO ALL'ASSE Y: STUDIAMO
SOLO IL CASO $0 < x < 1$

SEGNO:

IL NUMERATORE È POSITIVO; $1-x^2$
È MINORE DI 1, QUINDI $\ln(1-x^2)$
È NEGATIVO, PER CUI $f(x) < 0$ SU
TUTTO IL DOMINIO

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

LIMITE
NOTEVOLE

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} - \frac{-x^2}{\ln(1-x^2)} = -1$$

$x=0$ È UNA DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

DERIVATA PRIMA:

$$y = \frac{x^2}{\ln(1-x^2)}$$

$$y' = \frac{2x \ln(1-x^2) - x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)}{\ln^2(1-x^2)} =$$

$$= \boxed{2x}_{>0} \frac{\ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}}{\boxed{\ln^2(1-x^2)}_{>0}}$$

(DIFFICILE ↓)

IL SEGNO DI y' DIPENDE INTERAMENTE
DAL SEGNO DI

$$g(x) = \ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}$$

PERCUI STUDIAMO IL SEGNO DI $g(x)$

PER $0 < x < 1$

$$g(x) = \ln(1-x^2) + \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{1-x^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x(1-x^2) + 2x}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3}{(1-x^2)^2}$$

$$g'(x) > 0 \quad \text{PER} \quad 0 < x < 1$$

QUINDI $g(x)$ CRESCE PER $0 < x < 1$

OLTRE TUTTO $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ DA CUI

DEDUCIAMO CHE $g(x)$ È POSITIVA PER

$0 < x < 1$; IN CONCLUSIONE $f(x)$

È CRESCENTE PER $0 < x < 1$

NOTIAMO ANCHE CHE $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

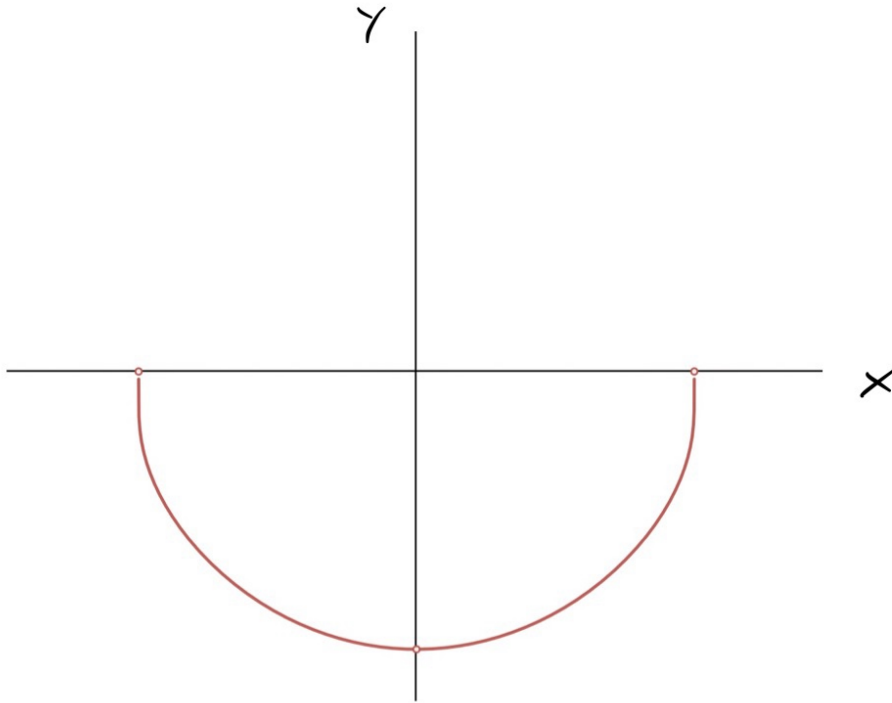
CIOÈ $f(x)$ HA UN PUNTO STAZIONARIO
(MINIMO ASSOLUTO) IN CORRISPONDENZA

DELLA SINGOLARITÀ ELIMINABILE $x = 0$

DA NOTARE ANCHE CHE

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty$$

GRAFICO:



(ix)

$$f(x) = \frac{1 - |x^2 - 2|}{|x|}$$

DOMINIO:

$$|x| \neq 0 \rightarrow x \neq 0$$

IL DOMINIO È $D = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

SIMMETRIA:

NOTIAMO CHE $f(x)$ È PARI, INFATTI

$$f(-x) = \frac{1 - |(-x)^2 - 2|}{|-x|} = \frac{1 - |x^2 - 2|}{|x|} = f(x)$$

QUINDI STUDIAMO $f(x)$ SOLO PER $x > 0$, POICHÉ IL GRAFICO È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Y:

QUINDI STUDIAMO $f(x) = \frac{1 - |x^2 - 2|}{x}$ PER $x > 0$

(HO TOLTO IL MODULO AL DENOMINATORE POICHÉ x È POSITIVO)

COME OCCUPARCI DEL MODULO:

$$x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq 2 \iff x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$$

QUINDI LA FUNZIONE DA STUDIARE È

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - (x^2 - 2)}{x} & \text{SE } x \geq \sqrt{2} \\ \frac{1 + (x^2 - 2)}{x} & \text{SE } 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

(NELLA PRIMA ESPRESSIONE HO SEMPLICEMENTE TOLTO IL MODULO, MENTRE NELLA SECONDA HO TOLTO IL MODULO METTENDO UN - DAVANTI)

SEGNO:

PER $x \geq \sqrt{2}$

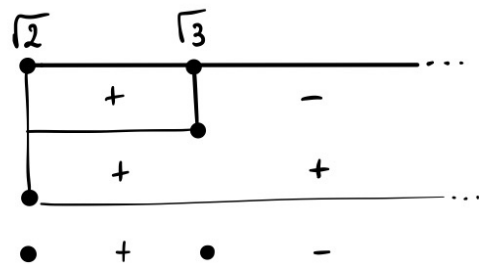
$$y = \frac{1 - (x^2 - 2)}{x} = \frac{3 - x^2}{x} = \frac{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{x}$$

$$\text{PONIAMO } \frac{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{x} \geq 0$$

$$(\sqrt{3} - x) \geq 0 \iff x \leq \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} + x) \geq 0 \iff x \geq -\sqrt{3}$$

QUINDI ANCHE
PER OGNI
 $x \geq \sqrt{2}$



PER $0 < x < \sqrt{2}$

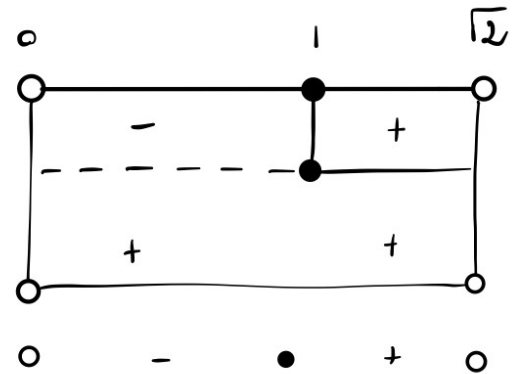
$$y = \frac{1 + (x^2 - 2)}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

PONIAMO $\frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0$

$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

$$x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$$

QUINDI ANCHE
PER OGNI
 $0 < x < \sqrt{2}$



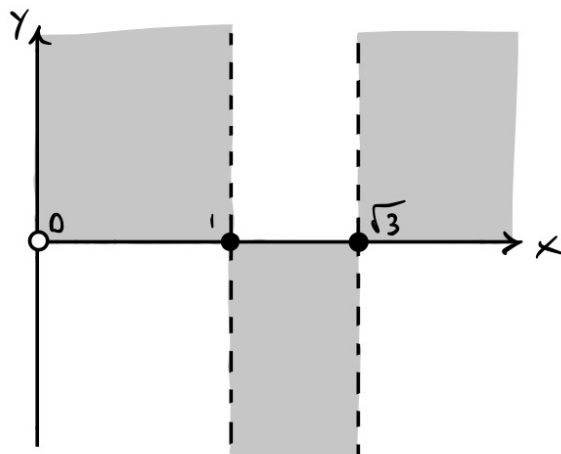
SI EVINCE ANCHE CHE LE
INTERSEZIONI CON L'ASSE X
SONO I PUNTI $(1, 0)$ E $(\sqrt{3}, 0)$

IN CONCLUSIONE, SEMPRE
ASSUMENDO $x > 0$, ABBIAMO

$$f(x) > 0 \iff 1 < x < \sqrt{3}$$

$$f(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = \sqrt{3}$$

$$f(x) < 0 \iff 0 < x < 1 \vee x > \sqrt{3}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - (x^2 - 2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)}{x(1)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-0)}{1} = -\infty$$

NON C'È ASINTOTO ORIZZONTALE;
C'È ASINTOTO OBLIQUO?

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2 + 3}{x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3 + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

QUINDI $y = \underset{m}{-1} \cdot x + \underset{q}{0}$ È ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + (x^2 - 2)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = -\infty$$

PER IL
SEGNO BASTA
GUARDARE LO
STUDIO DEL
SEGNO FATTO
IN PRECEDENZA

QUINDI $x = 0$ È ASINTOTO VERTICALE

DERIVATA PRIMA:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 3}{x} & \text{SE } x \geq \sqrt{2} \\ \frac{x^2 - 1}{x} & \text{SE } 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{-x^2 + 3}{x} \right) &= \frac{d}{dx} (-x + 3x^{-1}) = -1 + 3 \cdot (-1) x^{-2} = \\ &= -1 - \frac{3}{x^2} = \frac{-x^2 - 3}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) &= \frac{d}{dx} (x - x^{-1}) = 1 + x^{-2} = \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-(x^2 + 3)}{x^2} & \text{SE } x > \sqrt{2} \\ \frac{x^2 + 1}{x^2} & \text{SE } 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

NOTIAMO CHE

$$f'(x) < 0 \quad \text{PER } x > \sqrt{2}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{PER } 0 < x < \sqrt{2}$$

COSA SUCCEDDE PER $x = \sqrt{2}$?

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{-(x^2 + 3)}{x^2} = -\frac{5}{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \left. \frac{-x^2 + 3}{x} \right|_{x=\sqrt{2}} = \frac{-2 + 3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ È PUNTO ANGOLOSO

CONCLUDIAMO CHE

$f(x)$ CRESCE $\leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}$

$f(x)$ DECRESCe $\leftrightarrow x > \sqrt{2}$

GRAFICO (PER $x > 0$):

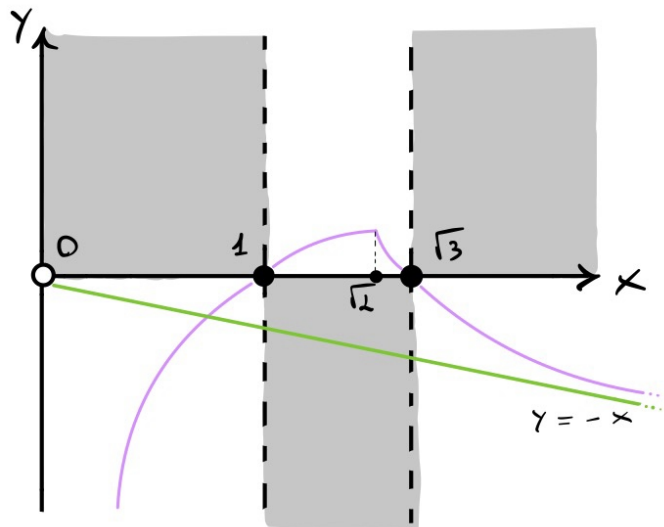
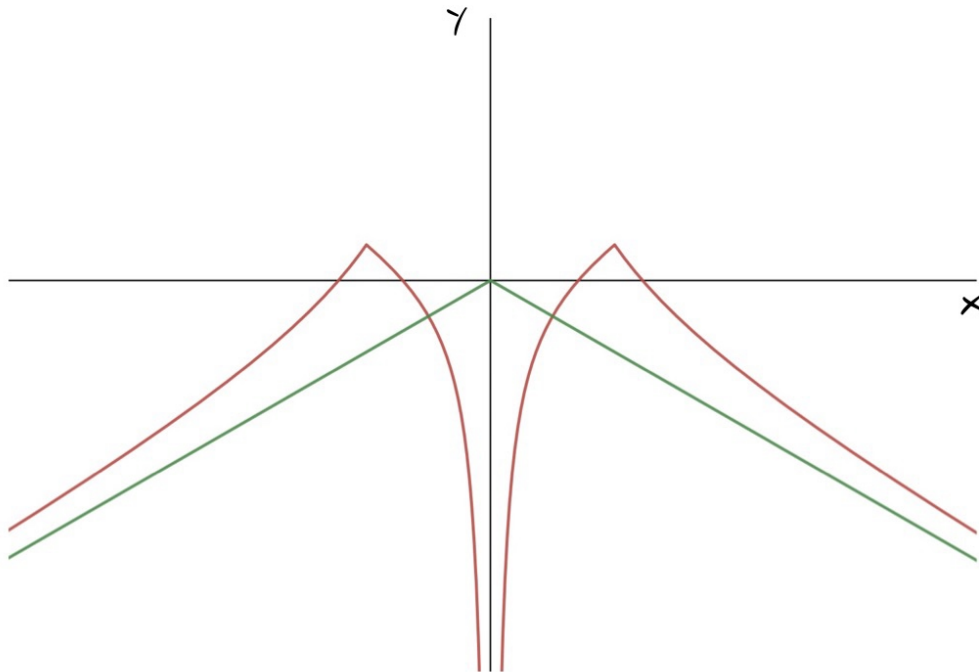


GRAFICO FINALE:



(x)

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

DOMINIO:

IL DOMINIO È $D = \mathbb{R}$

SEGNO:

$f(x)$ È SEMPRE POSITIVA,
POICHÉ $f(x) = e^{g(x)} \in \mathbb{D} \quad e^t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1}\right)} =$$

$$= e^{\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2(1+1/x^2)}\right)} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x(1+0)}\right)} =$$

$$= e^0 = 1$$

QUINDI $y = 1$ È ASINTOTO

ORIZZONTALE DESTRO E SINISTRO

DERIVATA PRIMA:

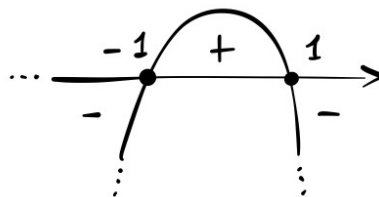
$$y = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$y' = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \right) =$$

$$= e^{\frac{2x}{x^2+1}} \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2 \underbrace{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}_{>0} \underbrace{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}_{>0}$$

IL SEGNO DI y' DIPENDE SOLO
DAL SEGNO DI $1-x^2$

$$\begin{aligned} \text{PONIAMO } 1-x^2 &\geq 0 \\ x^2 &\leq 1 \\ -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$



QUINDI

$f(x)$ CRESCE $\leftrightarrow -1 < x < 1$

$f(x)$ DECRESCe $\leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$f(x)$ HA PUNTI STAZIONARI PER

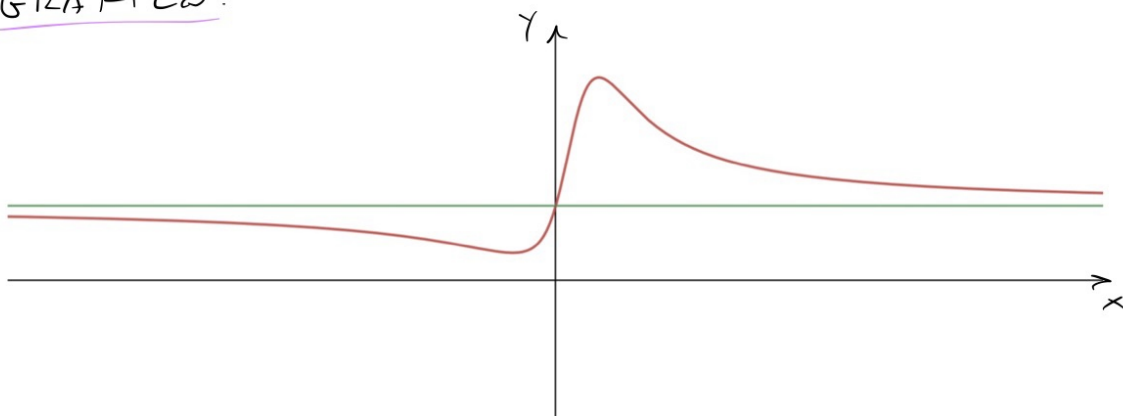
$x = -1$ (MINIMO ASSOLUTO) E

PER $x = 1$ (MASSIMO ASSOLUTO)

$$(-1; e^{\frac{2(-1)}{(-1)^2+1}}) = (-1; e^{-1}) \text{ È MIN. ASS.}$$

$$(1; e^{\frac{2 \cdot 1}{1^2+1}}) = (1; e) \text{ È MAX. ASS.}$$

GRAFICO:



(xi)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

DOMINIO:

IL DOMINIO È $D = \mathbb{R}$ POICHÉ e^{-x}
È UNA QUANTITÀ POSITIVA PER
OGNI x E DUNQUE IL DENOMINATORE
È MAGGIORE DI 1 PER OGNI x

SEGNO:

SIA IL NUMERATORE CHE IL
DENOMINATORE SONO SEMPRE
POSITIVI, PERCIÒ $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 1$ È ASINTOTO
ORIZZONTALE DESTRO

$y = 0$ È ASINTOTO
ORIZZONTALE SINISTRO

DERIVATA PRIMA:

$$y = \frac{1}{1+e^{-x}} = (1+e^{-x})^{-1}$$

$$y' = -(1+e^{-x})^{-2} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

CHIARAMENTE $y' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
QUINDI $f(x)$ CRESCE SU TUTTO
IL SUO DOMINIO

GRAFICO:

