Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 5

Esercizio 1.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x^2)-\frac{\pi}{4}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}}{\cos x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sinh x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cosh x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sinh x}{\cos x} = 1$

3. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(1+x^2)} = +\infty$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x-x^2}-2}{1-\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{\pi \sin \pi x} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2\pi \sin \pi x} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2\pi^2 \cos \pi x} = \frac{-1}{2\pi^2}$

5. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - 1}{1+\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x \log x} - 1}{1+\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\log x + 1)e^{x\log x}}{-\pi \sin \pi x} = +\infty$

6. $\lim_{x\to -1^+} \frac{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{4}(1-x^2)^{-\frac{3}{4}}2x} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{4}}(\pi\cos\frac{\pi}{2}x)}{x} = 0$

7. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3+\sqrt{x}-2x}-1}{3x^3-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-4\sqrt{x}+3x^{\frac{3}{2}}}{9x^{\frac{3}{2}}-1} = -1$

8. Studiamo il limite destro e sinistro separatamente, se essi coincidono il limite esiste ed è quel valore: $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x - x}{x|x| - x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x - x}{x^2 - x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - 1}{2x - 1 + e^x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-\sin x}{2 + e^x} = 0$
$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{x|x| - x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{-x^2 - x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x - 1}{-2x - 1 + e^x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-\sin x}{-2 + e^x} = 0$

Esercizio 2.

1. $$f(x) = x^3 + 12x^2 - x - 24 \implies f'(x) = 3x^2 + 24x - 1 \implies f''(x) = 6x + 24$$
   studiamo quando la derivata seconda è positiva: $6x + 24 \geq 0 \iff x \geq -4$, quindi la funzione è convessa in $(4, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 4)$, mentre $x = 4$ è un punto di flesso a tangente obliqua.

2. $$f(x) = \frac{x-1}{x^3} \implies f'(x) = \frac{x^3 - (x-1)3x^2}{x^6} = -\frac{3-2x}{x^4} \implies f''(x) = \frac{6(x-2)}{x^5}$$
   abbiamo che gli x per cui la funzione è convessa sono
   $$f''(x) \geq 0 \iff x < 0 \vee x \geq 2$$
   il punto $x = 2$ annulla la derivata seconda e non la prima, quindi è un punto di flesso a tangente obliqua.

3. $f(x) = \sinh x \cosh x = \dfrac{\sinh 2x}{2}$, quindi
   $$f''(x) = 2\sinh 2x \geq 0 \iff x \geq 0$$
   pertanto f è convessa per le x positive e concava per le x negative, mentre l'origine è punto di flesso.

4. $f(x) = \dfrac{\log x}{x} \implies f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \dfrac{1 - \log x}{x^2} \implies f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \log x)2x}{x^4} = \dfrac{2\log x - 3}{x^3}$
   $2\log x - 3 \geq 0 \iff \log x \geq \dfrac{3}{2} \iff x \geq \sqrt{e^3}$
   $x^3 > 0 \iff x > 0$
   Concludiamo che $f''(x) > 0 \iff x > \sqrt{e^3}$, $f''(x) = 0 \iff x = \sqrt{e^3}$, $f''(x) < 0 \iff 0 < x < \sqrt{e^3}$

Pertanto $f(x)$ è convessa per $x > \sqrt{e^3}$, è concava per $0 < x < \sqrt{e^3}$ ed ha un flesso in corrispondenza di $x = \sqrt{e^3}$; oltretutto $f'(\sqrt{e^3}) = \dfrac{1-3/2}{(3/2)^2} = \dfrac{-1/2}{9/4} = -\dfrac{2}{9} \neq 0$, quindi il flesso è a tangente obliqua.

5.

$$f(x) = e^{-x^2} \implies f'(x) = -2xe^{-x^2} \implies f''(x) = 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \geq 0$$

dunque

$$f''(x) \geq 0 \iff 4x^2 - 2 \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

quindi f è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ e concava in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, di conseguenza $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di flesso.

6. $f(x) = \dfrac{x^2+7x+50}{x^2+7x+49} = 1 + \dfrac{1}{x^2+7x+49}$ troviamo i valori per cui f è convessa

$$f''(x) = \frac{2(2x+7)^2}{(x^2+7x+49)^3} - \frac{2}{(x^2+7x+49)^2} \geq 0 \iff \frac{(2x+7)^2}{x^2+7x+49} - 1 \geq 0 \iff$$

$$x(x+7) \geq 0 \iff x \leq -7 \vee x \geq 0$$

0 e 7 sono flessi e la funzione è concava in $(-7, 0)$.

Esercizio 3. Troviamo dapprima il flesso della funzione $f(x) = 4\log x + 2x^2 + x + 1$: $f''(x) = 4 - \frac{4}{x^2} \geq 0 \iff \frac{1}{x^2} \leq 1 \iff x \geq 1$ dove nell'ultima equivalenza abbiamo usato che la funzione è definita solo per gli x positivi, dunque il punto di flesso è $x = 1$. L'equazione della retta tangente ad f in $x = 1$ è

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 4 + 9(x-1) = 9x - 5$$