Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 7

Esercizio 1.

1. $$\int \frac{8x^3}{1+x^8}dx = 2\int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2}dx = 2\arctan(x^4) + c$$

2. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}} + \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx + \int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx$$

   Risolviamo i due integrali separatamente:

   - Nel primo integrale facciamo la sostituzione

     $$x^2-4x+8 = (x+t)^2 \implies x = \frac{8-t^2}{2t+4} \implies dx = -\frac{t^2+4t+8}{2(t+2)^2}dt$$

     Quindi $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \int \frac{1}{\frac{8-t^2}{2t+4}+t}\left(-\frac{t^2+4t+8}{2(t+2)^2}\right)dt = -\int \frac{1}{t+2}dt =$
     $-\log(|t+2|) + c = -\log|\sqrt{x^2-4x+8} - x + 2| + c$

   - $$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x(1+\frac{1}{\cos^2 x})}dx = \int \frac{1}{(\cos^2 x)(2+\tan^2 x)}dx \underset{t=\tan x}{\overset{\uparrow}{=}}$$
     $$\int \frac{1}{2+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

   In conclusione l'integrale di partenza è

   $$-\log|\sqrt{x^2-4x+8} - x + 2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

3. Anche qui facciamo separatamente i due integrali la cui somma ci dà quello di partenza

   - $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int(1-x^2)'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\sqrt{1-x^2}+c$
   - $\int e^{\sqrt{x}}dx \underset{t=\sqrt{x}}{\underset{\uparrow}{=}} 2\int te^t dt = 2te^t - 2e^t = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

   Pertanto l'integrale di partenza è

   $$-\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

4. L'integrale è somma dei due che calcoliamo.

   - Facendo la sostituzione $t = \frac{2-t^2}{2t+3}$ (ottenuta da $x^2-3x+2 = (x+t)^2$) abbiamo
     $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx = -\int \frac{1}{2t+3}dt = -\log|2\sqrt{x^2-3x+2}-2x+3|+c$
   - $\int xe^x \cos x \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int xe^x \sin 2x\,dx$
     Osserviamo che $\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x dx$ da cui
     $\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + c$ analogamente si trova che $\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}(2e^x \sin 2x + e^x \cos 2x)$ usiamo questi risultati nell'integrazione per parti dell'integrale che dobbiamo calcolare
     $\frac{1}{2}\int xe^x \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(x\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - \cos 2x) - \int \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x)\,dx\right) = \frac{1}{50}e^x\left((5x+3)\sin 2x + (4-10x)\cos 2x\right) + c$

   In conclusione il risultato dell'integrale di partenza è

   $$-\log|2\sqrt{x^2-3x+2}-2x+3| + \frac{1}{50}e^x\left((5x+3)\sin 2x + (4-10x)\cos 2x\right) + c$$

5. - $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,dx = \arctan(x+2)+c$
   - $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx \underset{t=\sin x+\cos x}{\underset{\uparrow}{=}} -\int \frac{1}{t}dt = -\log(|\sin x + \cos x|) + c$

   In conclusione l'integrale di partenza è $\arctan(x+2) - \log(|\sin x + \cos x|) + c$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+2x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=\tan t}}{=} \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$
$\displaystyle\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+c = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{\sin(2\arctan x)}{4} + c = \arctan x + \frac{1}{2}\sin(\arctan x)\cos(\arctan x) +$
$\displaystyle c = \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c$

   dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   e $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

7. $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x+4}{x-2}\right)\,dx = x\arctan\left(\frac{x+4}{x-2}\right) + \int \frac{6x}{(1+\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^2)(x-2)^2}\,dx =$
$\displaystyle x\arctan\left(\frac{x+4}{x-2}\right) + \int \frac{3x}{x^2+2x+10}\,dx$
   Usando i fratti semplici abbiamo $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx -$
$\displaystyle 3\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \frac{3}{2}\log(|x^2+2x+10|) - \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + c =$
   In conclusione l'integrale di partenza è
$\displaystyle x\arctan\left(\frac{x+4}{x-2}\right) + \frac{3}{2}\log(|x^2+2x+10|) - \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,dx = \frac{1}{12}\left(\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{-x+4}{(x^2-2x+4)}\,dx\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{12}\log(|x+2|) - \frac{1}{24}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}dx = \frac{1}{12}\log(|x+2|) - \frac{1}{24}\log(|x^2-2x+$
$\displaystyle 4|) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx = \frac{1}{12}\log(|x+2|) - \frac{1}{24}\log(|x^2-2x+4|) -$
$\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

9. Usiamo la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$, con questa sostituzione abbiamo
   $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
   Da cui $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{1}{t(t+1)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt =$
$\displaystyle\log\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = \log\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right| + c$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}dx \underset{\substack{\uparrow \\ t=\cot x}}{=} -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cot^3 x}{3} + c$

11. Utilizzo del formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e applico la sostituzione: $t = \tan\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Quindi: $\displaystyle\int \frac{\cot x + (\sin x)^{-1}}{3\cos x + 3 - \sin x}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{2t} + \frac{1+t^2}{2t}}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{\frac{1-t^2}{2t} + \frac{1+t^2}{2t}}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}dt =$
$\displaystyle\int \frac{1}{t(3-t)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{3}\int \frac{1}{3-t}dt = \frac{1}{3}[\ln|t| - \ln|3-t|] + C =$
$\displaystyle\frac{1}{3}[\ln|\tan(\frac{x}{2})| - \ln|3 - \tan(\frac{x}{2})|] + C$

12. Utilizzo la sostituzione di Eulero:

$$x^2 + 4x - 4 = (x+t)^2$$

Da cui ne segue che:

$$x = \frac{t^2+4}{4-2t} \implies dx = \frac{-2t^2+8t+8}{(4-2t)^2}dt$$

Da cui segue sostituendo che:
$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2+4}{4-2t}(\frac{t^2+4}{4-2t} + t)} \frac{-2t^2+8t+8}{(4-2t)^2}dt = \int \frac{2(-t^2+4t+4)}{(t^2+4)(4+4t-t^2)}dt =$
$\displaystyle 2\int \frac{1}{t^2+4}dt = \arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \arctan\left(\frac{-x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2}\right) + c$

13. Utilizzo la sostituzione di Eulero:

$$x^2 + x = (x+t)^2$$

Da cui segue che:

$$x = \frac{t^2}{1-2t} \quad dx = \frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}dt$$

Da cui segue sostituendo che:
$\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\sqrt{x^2+x}dx = \int \frac{t^2+1-2t}{t^2}\left(\frac{t^2}{1-2t} + t\right)\frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2}dt = \int \frac{2(t^2+1-2t)(1-t)(t-t^2)}{t(1-2t)^3}dt =$
$\displaystyle\int \frac{2t^4 - 8t^3 + 12t^2 - 8t + 2}{(1-2t)^3}\,dt$

Ora utilizzando prima la divisione polinomiale e successivamente i fratti semplici ottengo:

$$\int \frac{2t^4-8t^3+12t^2-8t+2}{(1-2t)^3}dt = \frac{-2t^4+12t^3-15t^2+5t}{4(4t^2-4t+1)} - \frac{3}{8}\ln|2t-1| + c$$

Ed ora sostituendo $t = -x + \sqrt{x^2+x}$ risolvo l'integrale:

$\frac{-2(-x+\sqrt{x^2+x})^4+12(-x+\sqrt{x^2+x})^3-15(-x+\sqrt{x^2+x})^2+5(-x+\sqrt{x^2+x})}{4(4(-x+\sqrt{x^2+x})^2-4(-x+\sqrt{x^2+x})+1)} - \frac{3}{8}\ln|2(-x+\sqrt{x^2+x})-1| + c$

Metodi alternativi: Completare il quadrato all'interno della radice e usare sostituzioni tipo $x = \cosh^2 t$ o $x = \frac{1}{\cos^2 t}$, con lo scopo di usare le identità $1+\sinh^2 t = \cosh^2 t$ oppure $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

14. Ora noto che il segno del coefficiente di x^2 è negativo, quindi posso usare la sostituzione tramite il seno. Prima ricostruisco il quadrato:

$$5 - x^2 - x = -(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{21}{4}$$

Da cui se ne deduce l'immediata sostituzione:

$$x + \tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}\sin t$$

Quindi:

$$dx = \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt$$

Allora $\displaystyle\int (5-x^2-x)^{-\frac{3}{2}}dx = \int \left(\frac{21}{4}\cos^2 t\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt = \int \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{21}{4}}\cos t}\right)^3 \frac{\sqrt{21}}{2}\cos t dt =$ $\displaystyle\frac{4}{21}\int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \frac{4}{21}\tan t + c = \frac{4}{21}\tan\left(\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + c$

15. Anche in questo caso il termine davanti a x^2 ha segno negativo, quindi utilizzo la seguente sostituzione:

$$x = a\sin t \quad dx = a\cos t dt$$

Quindi, dove $a \in \mathbb{R}$, allora: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\, dx = \int \frac{|a|\cos t}{a\sin t} a\cos t\, dt =$ $\displaystyle|a|\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\, dt = |a|\int \frac{1}{\sin t}\, dt - |a|\int \sin t\, dt = |a|\int \frac{1}{\sin t}\, dt + |a|\cos t + c$

Ma l'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\, dt$ si risolve con la solita sostituzione

$z = \tan\frac{t}{2}$

Da cui segue immediatamente che: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln\left(\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) + c$

E quindi: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = |a|\ln\left(\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) + |a|\cos t + c = |a|\ln\left(\left|\tan\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2}\right|\right) +$
$\displaystyle|a|\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c = |a|\ln\left|\left(\frac{\frac{x}{a}}{1+\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\right)\right| + |a|\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} + c$

16. Facciamo la sostituzione $t = \cot x$, da cui $dt = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$, usiamo inoltre che $1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ e poi facciamo i fratti semplici:
$\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\tan x}dx = -\int \frac{\sin^4 x}{1+\tan x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{1}{(1+\frac{1}{t})(1+t^2)^2}dt =$
$\displaystyle\int \frac{t}{(t+1)(1+t^2)^2}dt = \int \frac{t-1}{4(t^2+1)}\ dt + \int \frac{t+1}{2(t^2+1)^2} - \int \frac{1}{4(t+1)}dt =$
$\displaystyle\frac{1}{8}\left(\frac{2(t-1)}{t^2+1} + \log(t^2+1) - 2\log(t+1)\right) + c = \frac{1}{8}\left(-\sin 2x - \cos 2x + 2\log|\cos x + \sin x|\right) +$
c

17. Facciamo la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, da cui $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, abbiamo quindi
$\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2(1-t^2)^2}{(t^2+1)^3(\frac{1-t^2}{t^2+1}+1)}\ dt = \int \frac{(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}\ dt = \int \left(\frac{t^2+1-2}{t^2+1}\right)^2\ dt =$
$\displaystyle\int \left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)^2\ dt = \int 1\ dt - 4\int \frac{1}{1+t^2}\ dt + 4\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt \underset{\substack{\uparrow\\ es.6}}{=} t -$
$\displaystyle 2\arctan(t) + \frac{2t}{(t^2+1)} + c = \tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + \sin x + c$

18. Stessa sostituzione dell'esercizio precedente
$\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\ dx = \int \frac{2(1-t^2)^2}{(t^2+1)^2(t+1)^2}dt = 2\int \frac{(t-1)^2}{(t^2+1)^2}\ dt = 2\int \frac{1}{t^2+1}\ dt -$
$\displaystyle 2\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\ dt = 2\arctan t + \frac{2}{t^2+1} + c = x + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + c = x + \cos x + c$
La primitiva finale è semplice, infatti si poteva fare l'integrale in maniera più semplice, bastava osservare che $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1+\sin x)(1-\sin x)$

19. Facciamo la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$ e, dopo aver sostituito le solite espressioni di seno e coseno in funzione di t, scomponiamo in fratti semplici.
$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx = -4\int \frac{t}{(t^2-2t-1)(t^2+1)}dt = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{2t-2}{t^2-2t-1} - \frac{2t}{t^2+1} + \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\log|t^2-2t-1| + \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \arctan t + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2}) - 2\tan(\frac{x}{2}) - 1}\right| +$
$\displaystyle\frac{x}{2} + c$

Modo alternativo: Fare la sostituzione $t = \cot x$ come nell'esercizio 16.

20. Facciamo sempre la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$:
$$\int \frac{\tan x}{\sin x + \tan x}\, dx = \int dt = t + c = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$