

Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e
Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 8

Esercizio 1.

- (i) Facciamo la sostituzione $t = e^x$, da cui $dt = e^x dx$, abbiamo dunque

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{4e^{2x} + 4e^x + 1} dx = \int_1^e \frac{t}{4t^2 + 4t + 1} dt = \frac{1}{8} \int_1^e \frac{8t + 4 - 4}{4t^2 + 4t + 1} dt =$$
$$\frac{1}{8} \int_1^e \frac{8t + 4}{(2t + 1)^2} dt - \frac{1}{4} \int_1^e \frac{2}{(2t + 1)^2} dt = \frac{1}{4} \left[\log(2t + 1) + \frac{1}{2t + 1} \right]_1^e = \frac{1}{4} \left(\log(2e + 1) - \log 3 + \frac{1}{2e + 1} - \frac{1}{3} \right)$$

- (ii) Calcoliamo prima, per parti, l'integrale indefinito $\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx =$

$$(x \cos x - \sin x) \left(-\frac{1}{x} \right) - \int (\cos x - x \sin x - \cos x) \left(-\frac{1}{x} \right) : dx = \frac{\sin x}{x} -$$

$$\cos x - \int \sin x dx = \frac{\sin x}{x} - 2 \cos x + c$$

pertanto

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = 2 - \frac{2}{\pi}$$

- (iii) Facendo la sostituzione $t = \tan(\frac{x}{2})$ e usando le solite espressioni di

$$\sin x \text{ e } \cos x \text{ in funzione di } t \text{ abbiamo } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8 + 4 \sin x + 7 \cos x} dx =$$

$$2 \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 8t + 15} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{(t + 3)(t + 5)} dt = \int_0^1 \frac{1}{t + 3} dt - \int_0^1 \frac{1}{t + 5} dt =$$

$$[\log(t + 3) - \log(t + 5)]_0^1 = \log\left(\frac{10}{9}\right)$$

(iv) Facciamo la sostituzione $t = \log \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x \log x} dx$, quindi abbiamo

$$\int_{e^e}^{e^{e^2}} \frac{1}{x (\ln x) (\ln^3 (\ln x))} dx = \int_1^2 t^{-3} dt = \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^2 = \frac{3}{8}$$

(v) Osserviamo che $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ quando $x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, quindi

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x^2 - 3x + 1| dx &= \int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} x^2 - 3x + 1 dx - \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x^2 - 3x + 1 dx + \\ &\int_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^3 x^2 - 3x + 1 dx = \frac{-9 + 10\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

(vi) Calcoliamo separatamente i casi $m = \pm n$ e $m \neq \pm n$. Se $m \neq \pm n$ scriviamo le formule di addizione per il coseno (perché lì abbiamo un prodotto di seni) e troviamoci una formula per l'integrando:

$$\cos(mx + nx) = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx$$

$$\cos(mx - nx) = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx$$

Se sottraiamo la prima equazione alla seconda e dividiamo per 2 otteniamo

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)}{2}$$

dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) dx = \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} - \frac{\sin((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Invece se $n = \pm m$ usiamo che $\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$, abbiamo quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2nx}{2} dx = \pm 1$$

Esercizio 2.

(i) Ci troviamo davanti un'equazione del tipo $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, sappiamo che la soluzione è data da

$$x(t) = e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

Dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$ e c la costante additiva che si trova imponendo il dato iniziale. Nel nostro caso dunque $A(t) = t$, dunque la soluzione dell'equazione è

$$x(t) = e^{-t} \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + c = \sqrt{t} e^{-t} + c$$

imponendo il dato iniziale otteniamo $c = x(0) = 1$, pertanto la soluzione è data

$$x(t) = \sqrt{t}e^{-t} + 1$$

- (ii) Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{x} = 3te^{t^2}x \\ x(0) = \sqrt{e^3} \end{cases}$

Risolvo l'equazione differenziale con separazione di variabili:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 3te^{t^2}$$

Integro in dt :

$$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)} ds = \int_0^t 3se^{s^2} ds$$

A sinistra faccio il cambio di variabile $x = x(s)$, da cui $dx = \dot{x}(s)ds$, quindi l'uguaglianza diviene

$$\int_{\sqrt{e^3}}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \int_0^t 3se^{s^2} ds$$

risolvendo gli integrali e isolando $x(t)$ ottengo:

$$x(t) = e^{\frac{3}{2}}e^{t^2}$$

(anche questo si poteva svolgere usando la formula per le ode lineari del prim'ordine, come all'esercizio precedente.)

- (iii) Risolviamo $\begin{cases} \dot{x} = 2t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ per separazione di variabili, abbiamo

$$\int_0^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^t 2s ds$$

da cui

$$\arcsin x(t) = t^2 \implies x(t) = \sin(t^2)$$

- (iv) Sempre usando la formula scritta nel punto (i) abbiamo

$$x(t) = \frac{\sin t}{2} + \frac{t}{2 \cos t}$$

- (v) Risolvo il seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} 10\dot{x} - 2tx = t^3 \\ x(0) = -5 \end{cases}$

Risolvo l'equazione omogenea associata con separazione di variabili:

$$10\dot{x} - 2tx = 0$$

e ottengo:

$$x_o(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Ora uso il metodo di delle variazioni di costanti per ottenere la soluzione particolare. Considero una soluzione particolare del tipo:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$$

Quindi $x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}}$; $\dot{x}_p(t) = \dot{c}(t)e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\frac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}}$ allora l'equazione deve verificare che:

$$10 \left(\dot{c}(t)e^{\frac{t^2}{10}} + c(t)\frac{t}{5}e^{\frac{t^2}{10}} \right) - 2t \left(c(t)e^{\frac{t^2}{10}} \right) = t^3$$

$$\text{Quindi: } c(t) = \frac{1}{10} \int t^3 e^{-\frac{t^2}{10}} dt = -\frac{t^2}{2} e^{-\frac{t^2}{10}} - 5e^{-\frac{t^2}{10}} + c$$

Allora la soluzione particolare è:

$$x_p(t) = c(t)e^{\frac{t^2}{10}} = -\frac{t^2}{2} - 5$$

Allora la generica soluzione all'equazione differenziale è:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = ce^{\frac{t^2}{10}} - \frac{t^2}{2} - 5 \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Adesso risolvo il problema di Cauchy:

$$-5 = x(0) = c - 5$$

e trovo che $c = 0$ da cui segue che la soluzione al problema è:

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} - 5$$

(Ovviamente si poteva usare la formula vista a lezione per Ode lineari del prim'ordine, come fatto nel primo problema di Cauchy dell'esercizio, qui abbiamo fatto lo stesso procedimento che si fa per ricavarla, per far vedere come risolvere l'equazione senza ricordarsi la formula.)

(vi) L'equazione polinomiale associata è $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, per cui la soluzione omogenea è

$$x_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x_p(t) = ce^t$, da cui otteniamo $c = -\frac{1}{4}$, per cui

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{4} e^t$$

Imponendo le condizioni di Cauchy otteniamo $c_1 = \frac{\sqrt{17}}{68}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{17}}{68}$, per cui

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{68} e^{\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}t\right)} - \frac{\sqrt{17}}{68} e^{\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}t\right)} - \frac{1}{4} e^t$$

(vii) La soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_o(t) = c_1 + c_2 t$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $x_p(t) = at^2 + bt + c$ (la funzione particolare è un polinomio di grado 0, ma l'equazione manca della sia della derivata di ordine zero che della derivata di ordine uno, quindi cerchiamo una soluzione particolare che sia un polinomio generico di grado pari al grado della funzione particolare +2). Otteniamo

$$x(t) = c_1 + c_2 t - \frac{9}{2} t^2$$

Risolvendo il problema di Cauchy abbiamo

$$x(t) = 1 + t - \frac{9}{2} t^2$$

(viii) Risolvo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = te^{3t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata:

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = 0$$

Cercando soluzioni del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$ come al solito passo al polinomio associato:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

Trovo $\lambda_{1,2} = 3, 4$ e quindi la soluzione dell'equazione diff. omogenea associata è:

$$x_o(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora cerco la soluzione particolare nella seguente forma: $x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c)$, poiché derivate e somme di polinomi per esponenziali continuano ad essere polinomi per esponenziali.

Quindi $x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c)$; $\dot{x}_p(t) = e^{3t}(3at^2 + (2a + 3b)t + b + 3c)$; $\ddot{x}(t) = e^{3t}(9at^2 + 12at + 2a + 9bt + 6b + 9c)$ allora l'equazione deve verificare che:

$$e^{3t}(9at^2 + 12at + 2a + 9bt + 6b + 9c) - 7e^{3t}(3at^2 + (2a + 3b)t + b + 3c) + 12e^{3t}(at^2 + bt + c) = te^{3t}$$

Quindi basta prendere $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$ e $c = 0$ La soluzione generale è quindi:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} + e^{3t}(-\frac{1}{2}t^2 - t) \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora risolvo il problema di Cauchy tale per cui $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$ e trovo quanto valgono c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} 1 = x(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = \dot{x}(0) = 3c_1 + 4c_2 - 1 \end{cases}$$

Quindi per risolvere il problema di Cauchy basta prendere $c_1 = 3$ e $c_2 = -2$

Soluzione finale:

$$x(t) = 3e^{3t} - 2e^{4t} + e^{3t}(-\frac{1}{2}t^2 - t)$$

(ix) Risolvo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = t \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Risolvo l'equazione omogenea associata:

$$2\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

Cercando soluzioni del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$ come al solito passo al polinomio associato:

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Trovo $\lambda_{1,2} = 1, \frac{1}{2}$ e quindi la soluzione dell'equazione diff. omogenea associata è:

$$x_o(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora cerco la soluzione particolare nella seguente forma: $x_p(t) = at + b$, poiché derivate e somme di polinomi continuano ad essere polinomi.

Quindi $x_p(t) = at + b$; $\dot{x}_p(t) = a$; $\ddot{x}(t) = 0$ allora l'equazione deve verificare che:

$$0 - 3a + at + b = t$$

Quindi basta prendere $a = 1$ e $b = 3$ La soluzione generale è quindi:

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\frac{1}{2}t} + t + 3 \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ora risolvo il problema di Cauchy tale per cui $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$ e trovo quanto valgono c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} 0 = x(0) = c_1 + c_2 + 3 \\ 1 = \dot{x}(0) = c_1 + \frac{1}{2}c_2 + 1 \end{cases}$$

Quindi per risolvere il problema di Cauchy basta prendere $c_1 = 3$ e $c_2 = -6$

Soluzione finale:

$$x(t) = 3e^t - 6e^{\frac{1}{2}t} + t + 3$$

Non riportiamo tutti i conti nei prossimi esercizi perché lunghi e molto simili ai precedenti.

$$(x) \begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin(2t) + t \\ x(0) = -13 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'omogenea, trovando le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \iff \lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

quindi la soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare, essa sarà somma di una parte polinomiale ed una parte trigonometrica, di cui quella polinomiale che ci dà la t si vede ad occhio (se non lo si vede se la cerchi come polinomio $at + b$), quindi cerco

$$x(t) = t - 1 + a \sin 2t + b \cos 2t \implies \dot{x}_p(t) = 1 + 2a \cos 2t - 2b \sin 2t \implies \ddot{x}_p(t) = -4a \sin 2t - 4b \cos 2t$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -3a - 2b = 1 \\ -3b + 2a = 0 \end{cases} \implies a = \frac{3}{2}b \implies \begin{cases} b = -\frac{2}{13} \\ a = \frac{3}{2}b = -\frac{3}{13} \end{cases}$$

Dunque

$$x_p(t) = t - 1 - \frac{3}{13} \sin 2t - \frac{2}{13} \cos 2t$$

Consideriamo

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(c_1 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) + t - 1 - \frac{3}{13} \sin 2t - \frac{2}{13} \cos 2t$$

Calcolando la derivata e imponendo i dati iniziali per trovare c_1 e c_2 , si ottiene che

$$c_1 = -\frac{154}{13} \quad c_2 = -\frac{56\sqrt{3}}{13}$$

(xi) La soluzione dell'omogenea è data da

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

Cercando la soluzione particolare della forma $x_p(t) = ae^t \cos t + be^t \sin t$ si trova che una soluzione particolare è data da $x_p(t) = -\frac{3}{10}e^t \sin t + \frac{1}{10}e^t \cos t$, sommata all'omogenea e sostituiti i dati iniziali, si trova che la soluzione finale è

$$x(t) = \frac{1}{10}e^t \cos t - \frac{3}{10}e^t \sin t - \frac{3}{5}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{2t}$$

(xii) La soluzione dell'omogenea è

$$x_o(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Dal momento che il termine noto risolve l'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare con un polinomio di grado 1 moltiplicato, osserviamo però che il

termine noto è dispari e abbiamo nell'equazione solo ordini di derivazione pari (questo tipo di osservazioni non è indispensabile, ma vi semplifica i calcoli), dunque la soluzione sarà una funzione dispari, pertanto la cerco della forma

$$x_p(t) = at \cos t \implies x'_p(t) = a \cos t - at \sin t \implies x''_p(t) = -2a \sin t - at \cos t$$

sostituendo nell'equazione otteniamo che

$$-2a = 1 \implies a = -\frac{1}{2}$$

pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}t \cos t$$

Se imponiamo i dati iniziali per trovare le costanti c_1 e c_2 , otteniamo $c_1 = 1$ e $c_2 = \frac{3}{2}$, quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \cos t + \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2}t \cos t$$

(xiii) Utilizzando la formula del punto (i) otteniamo

$$x(t) = ce^{\cos t} + 1$$

e impostando la condizione iniziale abbiamo

$$x(t) = e^{\cos t} + 1$$

(xiv) Risolvendo l'equazione omogenea otteniamo

$$x_o(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti, cerchiamo una soluzione del tipo

$$x_p(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$$

Derivando otteniamo $x'(t) = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t + c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t$, supponiamo $c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t = 0$ in modo che $x'(t) = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t$. Derivando nuovamente otteniamo $x''(t) = -c_1(t) \cos t - c_2(t) \sin t - c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t$, e inserendo nell'equazione iniziale otteniamo l'equazione

$$\begin{cases} -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t = \tan t \\ c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo la soluzione

$$x(t) = \left(\frac{2}{\cot\left(\frac{t}{2}\right) - 1} + c_1 \right) \cos t + c_2 \sin t$$

e impostando le condizioni del problema di Cauchy abbiamo

$$x(t) = \left(\frac{2}{\cot\left(\frac{t}{2}\right) - 1} + 1 \right) \cos t + \sin t$$

(xv) Procedendo in maniera analoga al punto precedente, si ottiene la soluzione generale

$$x(t) = \left(c_1 - \frac{t}{2} \right) \cos 2t + \left(c_2 + \frac{\log(\sin 2t)}{4} \right) \sin 2t$$

e impostando le condizioni del problema di Cauchy otteniamo

$$x(t) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{t}{2} \right) \cos 2t + \frac{\log(\sin 2t)}{4} \sin 2t$$