Università degli Studi di Roma Tre
A.A. 2024/2025
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito
Esercitatore: Luca Battaglia
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Soluzioni Tutorato 9

Esercizio 1.

1. Applicando il Teorema di Hopital 10^{10} volte (solo sul primo pezzo del limite, che sappiamo deve tendere a 0 per ordine di infiniti) otteniamo
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10^{10}}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{10^{10}!}{e^x}=0$$
quindi il limite richiesto è uguale a
$$\lim_{x\to\infty}(ax)^{\frac{b}{cx}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{b\log ax}{cx}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{b\log ax}{cx}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{b}{cx}}=1$$
(anche qui si poteva usare l'ordine di infiniti, piuttosto che fare Hopital nella terza uguaglianza)

2. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x}=$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}=1$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{\sin x-x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{\sin x+x\cos x}=$ $\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+8\cos 2x}{2\cos x-x\sin x}=3$

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(e^{\cos x}+x-1)-\pi}{\log\sin(-3x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(-\sin xe^{\cos x}+1)\sin(3x)}{3\cos(3x)}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{\cos x}\sin x}{\cos 3x}=$ $\frac{2}{9}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x-e^{\cos x}\cos x}{\sin 3x}=-\frac{2}{9}$

5. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a^3-2x^3}{\sqrt{2a^3x-x^4}}-\frac{1}{3}a^{\frac{5}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{3}{4}a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}}} = \frac{16}{9}a$

Esercizio 2.

1. Facciamo la sostituzione $x = \arctan t$, da cui $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, quindi

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, dt$$

Facciamo ora la sostituzione $u = \sqrt{t}$, da cui $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, ossia $dt = 2udu$, poi facciamo i fratti semplici

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2}dt = \int \frac{2u^2}{1+u^4}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{2u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{2u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}+\frac{\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}-\frac{\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\log(u^2-\sqrt{2}u+1)-\log(u^2+\sqrt{2}u+1)\Big)+\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{(u-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}\right)du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\log(u^2-\sqrt{2}u+1)-\log(u^2+\sqrt{2}u+1)\Big)+\int \left(\frac{1}{(2u-1)^2+1} - \frac{1}{(2u+1)^2+1}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\log(u^2-\sqrt{2}u+1)-\log(u^2+\sqrt{2}u+1)\Big)+\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\log(u^2-\sqrt{2}u+1)-\log(u^2+\sqrt{2}u+1)\Big)+\frac{1}{2}\left(\arctan(s-1)-\arctan(s+1)\right)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\tan x-\sqrt{2\tan x}+1)-\log(\tan x+\sqrt{2\tan x}+1)+\arctan(2\sqrt{\tan x}-1)-\arctan(2\sqrt{\tan x}+1)\right)+c$$

2. Facciamo il cambio di variabile $x = \sin t$, da cui $dx = \cos t dt$, poi integreremo per parti, quindi $\int x \arcsin x dx = \int t \sin t \cos t dt = \frac{1}{2}\int t \sin 2t dt =$ $\frac{1}{2}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}+\int \frac{\cos 2t}{2}\, dt\right) = -\frac{t\cos 2t}{4}+\frac{\sin 2t}{8}+c = -\frac{\arcsin x \cos(2\arcsin x)}{4}+$ $\frac{\sin(2\arcsin x)}{8}+c$ (con un po' di trigonometria potete scrivere in maniera più carina la primitiva)

   Metodo alternativo: integrare per parti da subito e fare eventualmente dopo la sostituzione trigonometrica.

3. Facciamo la sostituzione $t = x^3$, da cui $dt = 3x^2dx$, poi dopo aver sommato e sottrato 1 a numeratore, per spezzare la frazione, un integrale sarà immediato e un'altro faremo il cambio $t = \tan u$, dunque

$\int\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt\right) =$
$\frac{1}{3}\arctan t - \frac{1}{3}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{3}\arctan t - \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}+\frac{\cos 2u}{2}\,du = \frac{1}{3}\arctan t -$
$\frac{1}{6}u - \frac{\sin 2u}{12} + c = \frac{1}{3}\arctan t - \frac{1}{6}\arctan t - \frac{\sin 2\arctan t}{12} + c = \frac{1}{6}\left(\arctan(x^3) - \frac{x^3}{x^6+1}\right) +$
c (nell'ultima uguaglianza abbiamo scritto il risultato che si ottiene dopo un po' di trigonometria).

4. Scomponiamo il polinomio a denominatore e facciamo i fratti semplici:
$\int \frac{4}{x^4+4}dx = 4\int \frac{1}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}dx = \frac{1}{2}\left(-\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx\right) =$
$\frac{1}{4}\left(-\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx\right) =$
$= \frac{1}{4}\left(-\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{2}{1+(x-1)^2}\,dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{2}{1+(x+1)^2}\,dx\right) =$
$\frac{1}{4}\big(\log|x^2+2x+2| - \log|x^2-2x+2| + 2\arctan(x-1) + 2\arctan(x+1)\big) + c$

5. $\int \frac{2e^{2x}-e^x}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}dx \underset{t=e^x}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{2t-1}{\sqrt{3t^2-6t-1}}dt = \int \frac{2t-1}{\sqrt{(\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2-4}}dt \underset{u=\sqrt{3}t-\sqrt{3}}{\overset{\uparrow}{=}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}u+1}{\sqrt{u^2-4}}du \underset{u=2\cosh y}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2}{\sqrt{3}}y + 1\,dy = \frac{y^2}{3} + \frac{y}{\sqrt{3}} + c =$
$\frac{(\operatorname{arccosh}(\frac{\sqrt{3}}{2}(e^x-1))^2}{3} + \frac{\operatorname{arccosh}(\frac{\sqrt{3}}{2}(e^x-1))}{\sqrt{3}} + c$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2+2}}\,dx \underset{x=\frac{\sqrt{2}\tan t}{5}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos t}\,dt = \frac{1}{5}\int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt \underset{u=\sin t}{\overset{\uparrow}{=}}$
$\frac{1}{5}\int \frac{1}{1-u^2}\,du = \frac{1}{10}\left(\int \frac{1}{1-u}\,du + \int \frac{1}{1+u}\,du\right) = \frac{1}{10}\log\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + c =$
$\frac{1}{10}\log\left|\frac{1-\sin\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan x\right)}{1+\sin\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\arctan x\right)}\right| + c$

7. $\int \frac{\tan^3(\log x)}{x}\,dx \underset{t=\log x}{\overset{\uparrow}{=}} \int \tan^3 t\,dt = \int \tan t\left(-1+\frac{1}{\cos^2 t}\right)\,dt =$
$-\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt + \int \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt \underset{u=\cos t}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{u^3}du = \log u + \frac{1}{2u^2} + c =$

$\log(|\cos\log x|) + \dfrac{1}{2(\cos\log x)^2} + c$

Esercizio 3.

1. Applicando la formula per le Ode lineari del prim'ordine abbiamo
$$y(x) = 3(x+1)\log(x+1)$$

2. $\begin{cases} y' = y^3 \sin 2x \cos 2x = y^3 \frac{\sin 4x}{2} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases}$
Usando il metodo di separazione delle variabili otteniamo
$$\int_{\sqrt{2}}^{y(x)} \frac{1}{y^3}\, dy = \int_0^x \frac{\sin 4z}{2}\, dz$$
da cui
$$-\frac{1}{2y(x)^2} + \frac{1}{4} = -\frac{\cos 4x}{8} + \frac{1}{8} \implies \frac{1}{y(x)^2} = \frac{(1+\cos 4x)}{4} \implies y(x) = \sqrt{\frac{4}{1+\cos 4x}}$$

3. A prima occhiata il problema $\begin{cases} y' = (2x+y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ non contiene un' equazione del tipo studiato, tuttavia se facciamo il cambio di variabile $z(x) = y(x)+2x$, otteniamo il problema $\begin{cases} z' = z^2 + 2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$ che ha un'equazione a variabili separabili con soluzione $z(x) = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x)$, quindi $y(x) = z(x) - 2x = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x) - 2x$.

4. Per studiare $\begin{cases} y'' = 2xy' \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 3 \end{cases}$ facciamo il cambio di variabile $z = y'$, da cui $\begin{cases} z' = 2xz \\ z(1) = 3 \end{cases}$ che è a variabili separabili, da cui otteniamo $z(x) = 3e^{x^2-1}$, quindi la funzione y è la primitiva di questa funzione (tale funzione non ha primitiva elementare quindi la lasciamo in forma implicita): $y(x) = \int_0^x 3e^{t^2-1}\, dt$

5. Per risolvere $\begin{cases} y'' + y' = x - x^3 \\ y(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ usiamo il metodo di somiglianza. Risolviamo prima l'equazione omogenea $y'' + y' = 0$, che ha come soluzione
$$y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2$$

Cerchiamo la soluzione particolare come un polinomio di grado 4 (così nell'equazione abbiamo un polinomio di grado 3 quando sostituiamo), in cui non consideriamo il termine noto perché tanto ci interessano solo le derivate della soluzione (visto che compaiono solo quelle nell'equazione); dunque prendiamo $y_p(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx$, da cui $y_p'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$ e $y_p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$, pertanto

$$x - x^3 = y_p'' + y_p' = 4ax^3 + (3b + 12a)x^2 + (2c + 6b)x + 2c + d$$

che ci porta al sistema

$$\begin{cases} 4a = -1 \\ 3b + 12a = 0 \\ 2c + 6b = 12c + d = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -\frac{5}{2}$, $d = 5$; quindi $y_p(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 5x$, perciò la soluzione generale è data

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 - \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 5x$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$0 = y(0) = c_2 + c_1 \implies c_2 = -c_1$$

$$1 = y'(0) = -c_1 + 5 \implies c_1 = 4 \implies c_2 = -4$$

In conclusione la soluzione è data da

$$y(x) = 4e^{-x} - 4 - \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 5x$$

6. Anche per $\begin{cases} y'' - y = 2x \sin x + \cos x - e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ otteniamo il metodo di somiglianza.

La soluzione dell'omogenea è data da $y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, siccome l'esponenziale risolve l'omogenea, cerchiamo la soluzione particolare come $y_p(x) = (ax + b)\sin x + f \cos x + (cx + d)e^x$. Facendo conti analoghi al caso precedente otteniamo: $a = -1$, $b = 0$,$c = -\frac{1}{2}$, $d = 0$, $f = -\frac{3}{2}$; quindi la soluzione generale è data

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x \sin x - \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{2} x e^x$$

Imponendo i dati iniziali otteniamo $c_1 = \frac{3}{2}$ e $c_2 = 1$, quindi

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x + e^{-x} - x \sin x - \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{2} x e^x$$

7. Per risolvere $\begin{cases} y'' + 2y' + 1 = 2\sin^2 x \cos x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ riscriviamo prima il termine noto

$$2\sin^2 x \cos x = \sin x \sin 2x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x$$

quindi il problema diviene $\begin{cases} y'' + 2y' = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x - 1 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ La soluzione dell'omogenea è $y(x) = c_1 e^{-t} + c_2$, il pezzo della particolare che ci dà il -1 si vede ad occhio essere $-\frac{x}{2}$, cerchiamo dunque la soluzione particolare come $y_p(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 3x + d\cos 3x - \frac{x}{2}$, con gli ormai soliti conti, anche imponendo i dati iniziali, otteniamo

$$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{179}{260}e^{-2x} + \frac{1}{5}\sin x - \frac{1}{39}\sin 3x - \frac{1}{10}\cos 3x + \frac{1}{26}\cos 3x + \frac{11}{4}$$

8. L'equzione polinomiale associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, la cui unica soluzione è $\lambda = 1$; la soluzione omogenea è quindi

$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

La funzionde particolare può essere suddivisa come $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ dove $f_1(x) = x + 3$ e $f_2(x) = x^2 e^x$. Cerchiamo quindi due soluzioni particolari del tipo $y_{p,1}(x) = ax + b$ e $y_{p,2}(x) = x^2(lx^2 + mx + n)e^x$: la presenza del fattore x^2 in $y_{p,2}(x)$ è dovuta al fatto che $\lambda = 1$ è soluzione di molteplicità 2 dell'equazione polinomiale associata ed è esattamente il coefficiente di x nell'esponenziale di $f_2(x)$.
Calcolando le derivate prime e seconde di $y_{p,1}(x)$ e $y_{p,2}(x)$, e inserendo separatamente nell'equzione di partenza, troviamo la soluzione

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x + 5 + \frac{x^4}{12}e^x$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo la soluzione

$$y(x) = -4e^x + 3xe^x + x + 5 + \frac{x^4}{12}e^x$$

9. Dopo aver trovato la soluzione omogenea $y_o(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$, procedendo in maniera analoga al punto (xiv) del tutorato 8, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \left(c_1 - \frac{1}{3}\tanh(\sin 3x)\right)\cos 3x + c_2 \sin 3x$$

e imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = -\frac{1}{3}\tanh(\sin 3x)\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x$$

10. Dopo aver trovato la soluzione omogenea $y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, procedendo in maniera analoga al punto (xiv) del tutorato 8, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \left(c_1 - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)e^x + (c_2 + \arctan x)\, x e^x$$

e imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$y(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)e^x + (1 + \arctan x)\, x e^x$$