

Università degli Studi di Roma Tre  
A.A. 2024/2025  
Corso di Laurea Triennale in Fisica e  
Matematica  
AM110 - Analisi Matematica I

Docente: Pierpaolo Esposito  
Esercitatore: Luca Battaglia  
Tutori: Francesco Caristo, Michele Matteucci

Tutorato 1

**Esercizio 1.** Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti identità.

$$(i) \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

$$(ii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

$$(iii) \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$(iv) \prod_{k=0}^n (1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 1$$

$$(v) \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

**Esercizio 2.** Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti disuguaglianze.

$$(i) n^3 > 2n - 2 \text{ per ogni } n \geq 1$$

$$(ii) 2^n > n^3 \text{ per ogni } n \geq 10$$

**Esercizio 3.** Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni.

- (i)  $n^3 + 2n$  è divisibile per 3 per ogni  $n \geq 0$
- (ii)  $2^{2n+1} + 5^{2n+1}$  è divisibile per 7 per ogni  $n \geq 0$
- (iii)  $n^2 - 1$  è divisibile per 8 per ogni  $n \geq 1$  dispari
- (iv)  $2^n + 1$  è divisibile per 3 per ogni  $n \geq 1$  dispari
- (v) Un poligono convesso con  $n$  lati possiede  $\frac{n(n-3)}{2}$  diagonali per ogni  $n \geq 3$
- (vi) La somma degli angoli interni di un poligono convesso con  $n$  lati è  $(n-2)\pi$  per ogni  $n \geq 3$  (si assuma che il risultato sia vero per i triangoli)
- (vii) Date un insieme  $X$ , l'insieme delle parti di  $X$  è definito come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $X$  e si denota come  $\mathcal{P}(X)$ . Dato un insieme  $X$  di cardinalità finita  $n$ , la cardinalità di  $\mathcal{P}(X)$  è  $2^n$ .

**Esercizio 4.** I numeri di Fibonacci sono definiti in maniera ricorsiva nel seguente modo: definiamo  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$  e in generale  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  per ogni  $n \geq 1$ . I primi 10 numeri di Fibonacci sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Utilizzando il principio di induzione, dimostrare le seguenti affermazioni riguardo i numeri di Fibonacci.

- (i)  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$  per ogni  $n \geq 1$
- (ii)  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$  per ogni  $n \geq 1$
- (iii)  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$  per ogni  $n \geq 1$
- (iv)  $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$  per ogni  $n \geq 1$
- (v)  $f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$  per ogni  $n \geq 0$

**Esercizio 5.** Determinare se i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono limitati superiormente/inferiormente, in caso affermativo calcolare l'estremo superiore/inferiore, e stabilire se si tratta di un massimo/minimo.

- (i)  $\left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (ii)  $\left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$
- (iii)  $\left\{ (-1)^n \frac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (iv)  $\left\{ n^2 e^{-n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (v)  $\left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+2} \leq x+3 \right\}$

$$(vi) \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 1} > 0 \right\}$$

$$(vii) \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - 5x^2 + 3| \leq 2x \right\}$$

**Esercizio 6.** Dato l'insieme  $A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ , dimostrare che  $\sup A = 1$ ,  $\inf A = -1$  e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.

**Esercizio 7.** Dato l'insieme  $B = \left\{ \frac{\log x}{\sqrt{1 + \log^2 x}} : x \in [1, +\infty) \right\}$ , dimostrare che  $\sup B = 1$ ,  $\inf B = 0$  e stabilire se si tratta di massimi e/o minimi.