SAN CARLO ALLE QUATTRO FONTANE

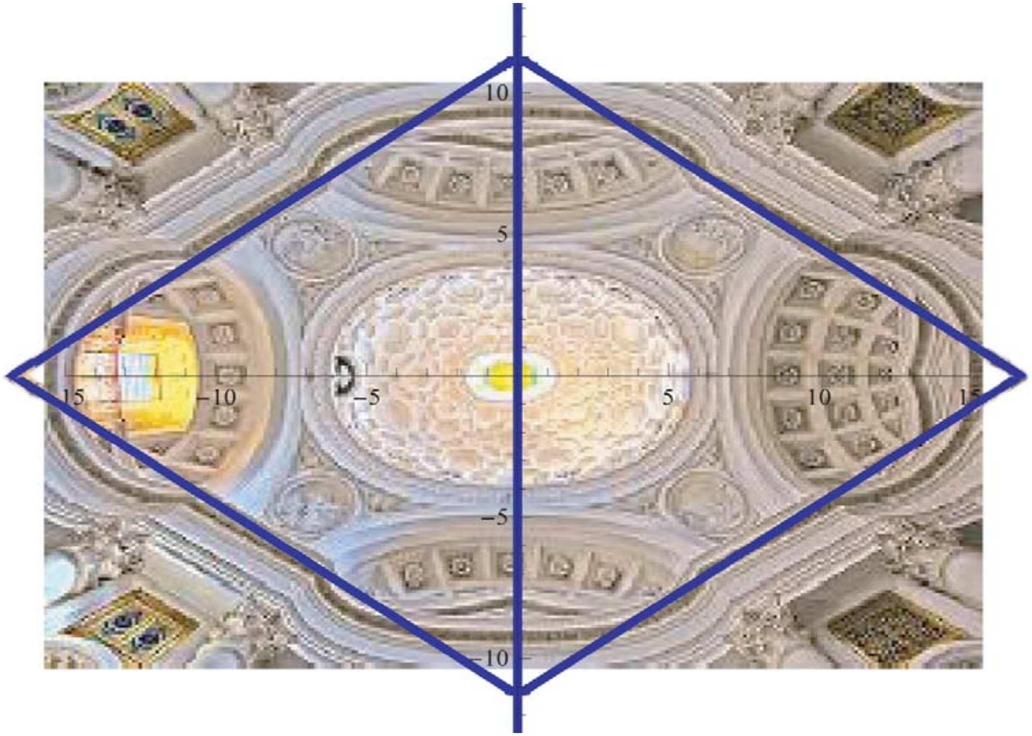
STUDIO MATEMATICO SULLE CURVE E SUPERFICI DELLA VOLTA

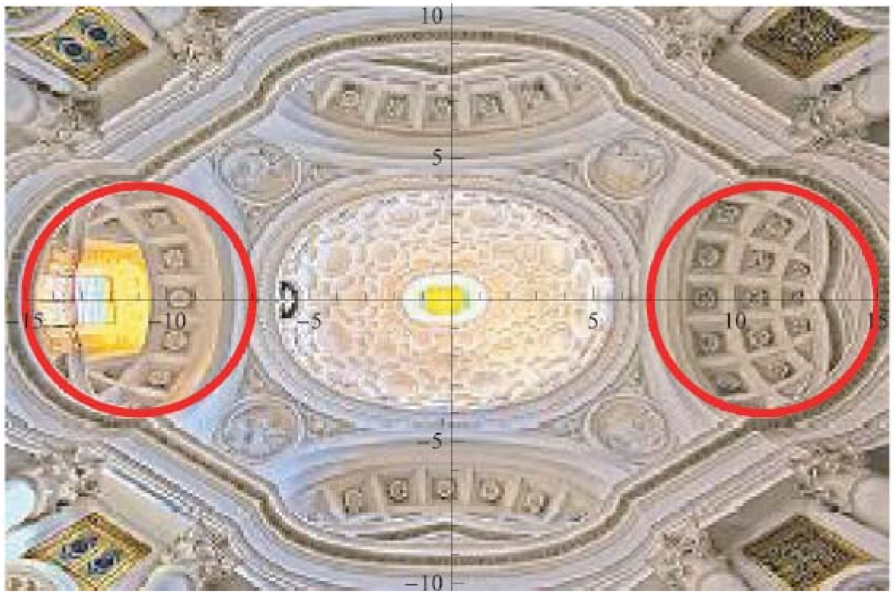
PROFESSORE CORRADO FALCOLINI
STUDENTE MICHELE ANGELO VALLICELLI

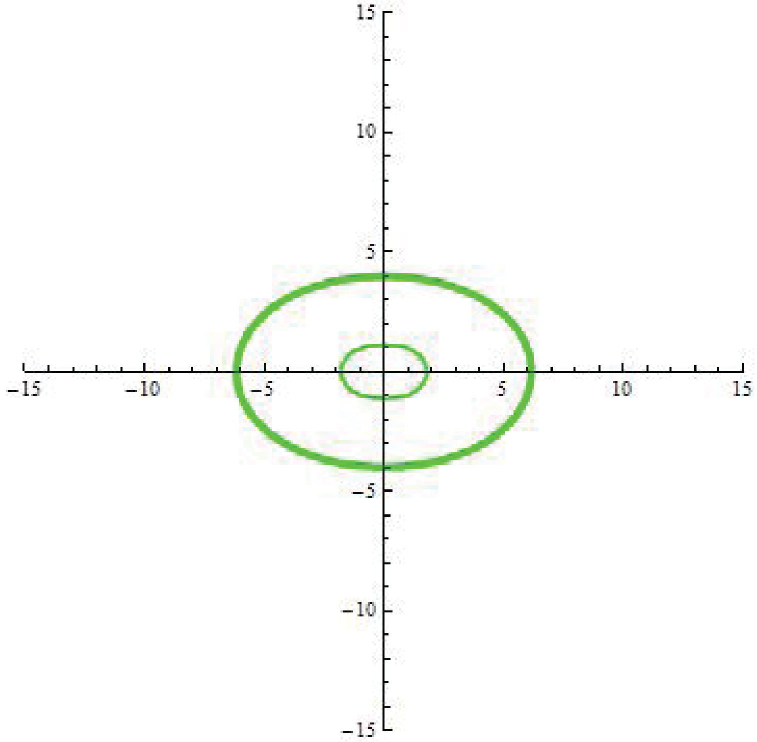
CORSO DI MATEMATICA CURVE E SUPERFICI A.A. 2009/2010 PROGETTAZIONE ARCHITETTONICA

GEOMETRIA ORIGINARIA

Com’è noto, al contrario di come possa sembrare le architetture di Borromini sono caratteririzzate da martici geometriche elementari come circonferenze o triangoli (quasi sempre equilateri), che da un punto di vista compositivo si complicano e arricchiscono solo successivamente, con lo sviluppo del progetto.Così anche in questo caso la volta in pianta nasce dall’accostamento di due triangoli equilateri speculari. Formati da rette quindi del tipo: y=3/2x+c. Per quanto riguarda le absidi laterali come detto precedentemente nascono da ele menti semplici : nel caso specifico due circonferenze speculari rispetto ad un asse x=0. Prendendo l’equazione parametrica di una circonferenza (y=a + r*Cos[t], x=b + r*Sin[t]) i centri saranno ripettivamente definiti dalle equazioni con i valori (+a;-a) e (b=0), dove a e b sono rispettivamente le ascisse e le ordinate delle coordi nate del centro.







EPITROCOIDE

Per quanto riguarda le absidi centrali vale lo stesso discorso. Si può comunque affermare che la loro origine sia la circonferenza, e non l'ellisse (come in apparenza può sembrare). Infatti esse si possono assumere come cinconferenze 'schiacchiate'. Da un punto di vista matematico la curva che si adatta loro meglio è una epitrocoide. Le epitrocoidi sono delle curve piane, considerabili come un particolare caso dell'epicloide in cui però il raggio della circonferenza che 'rotola' è diverso da quello che descrive la funzione. La sua equazione parametrica è:

EPITROCOIDE:

x=(R+r)cos[t]-h*cos(R+r/r*[t])

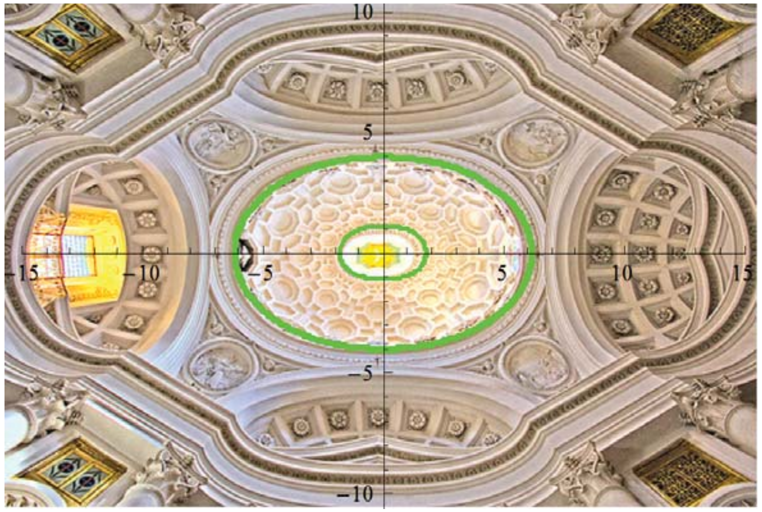
y=(R+r)sin[t]-h*sin(R+r/r*[t]

EPICICLOIDE:

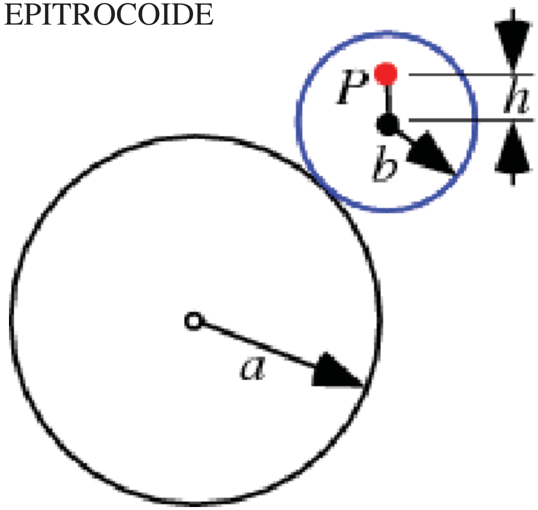
x=(R+r)cos[t]-r*cos(R+r/r*[t])

y=(R+r)sin[t]-r*sin(R+r/r*[t]

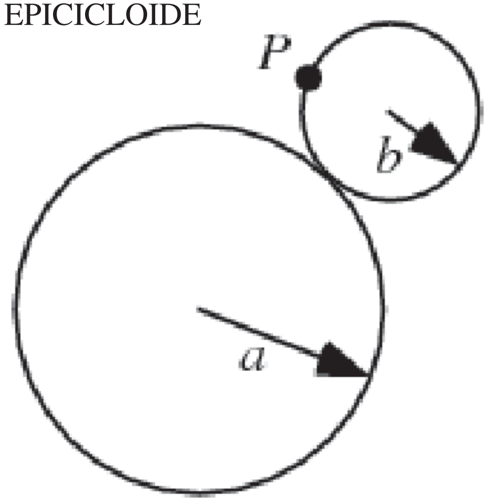
Questo particolare caso è un epitrocoide a due lobi, generata quindi da due circonferenze con un raggio rispettivamente metà dell'altro. Tuttavia mi sono reso conto che per adattare meglio la curva all'immagine ho dovuto far 'ruotare' la circonferenza minore anzichè su un altra circonferenza, su un ellisse. Ho così moltiplicato i due termini iniziali della parametrica per dei valori k e ne ho studiati i vari casi.



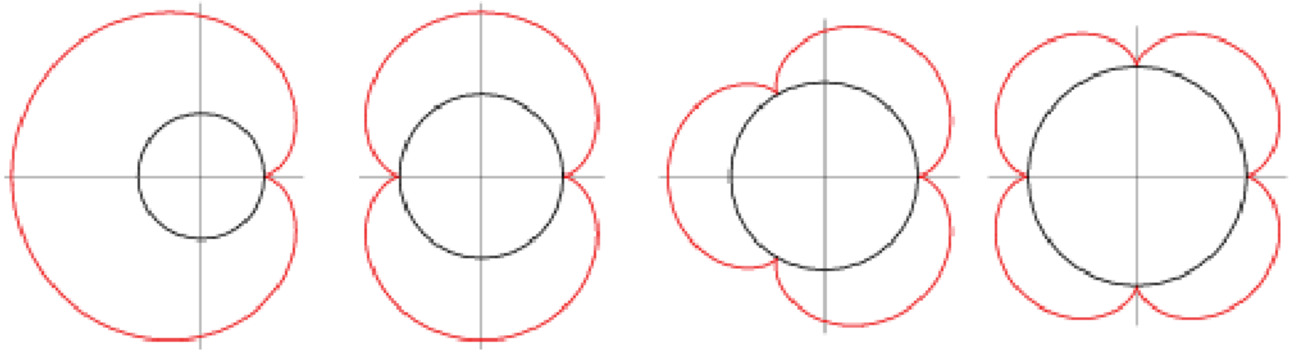
EPITROCOIDE



EPICICLOIDE



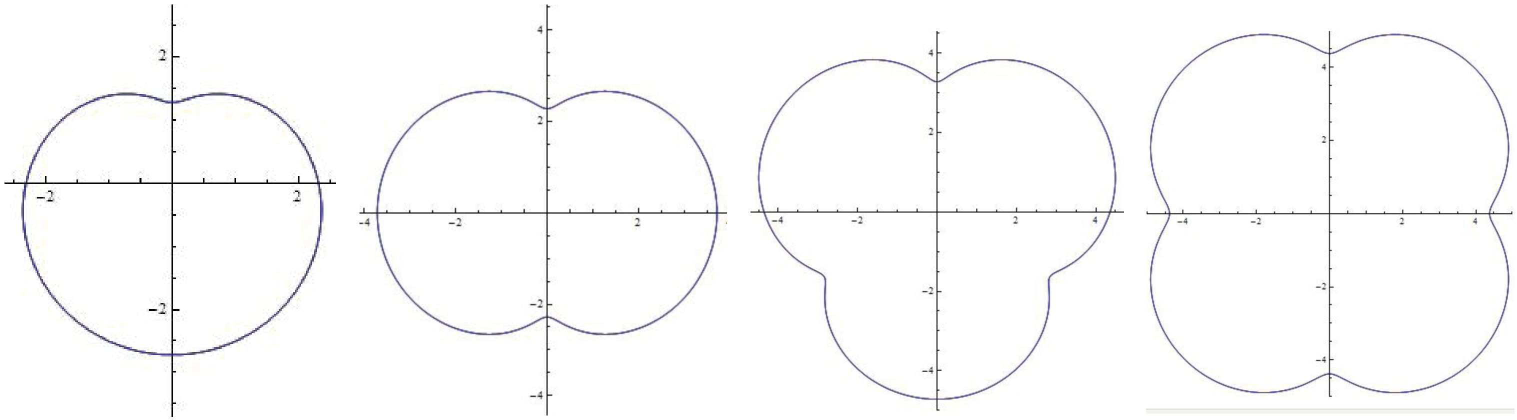
CASI DI EPICICLOIDI



R=1*r R=2*r R=3*r R=4*r

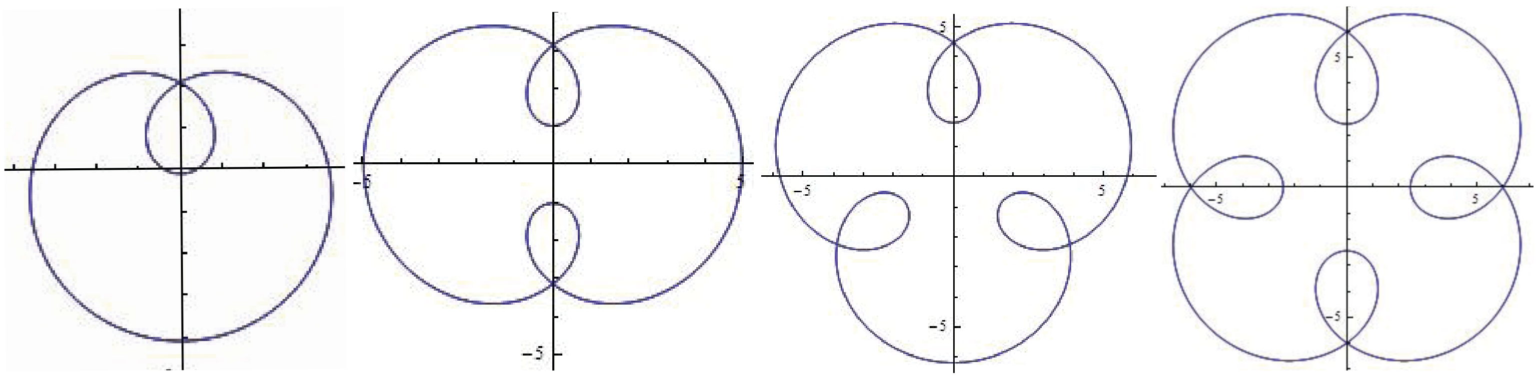
r=h

CASI DI EPITROCOIDI



R=1*r R=2*r R=3*r R=4*r

r>h

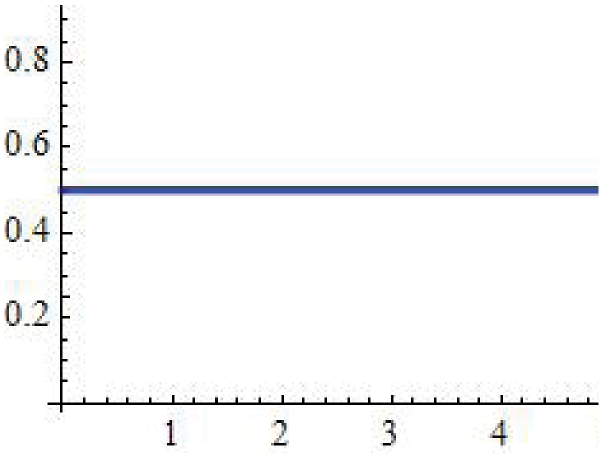


r<h

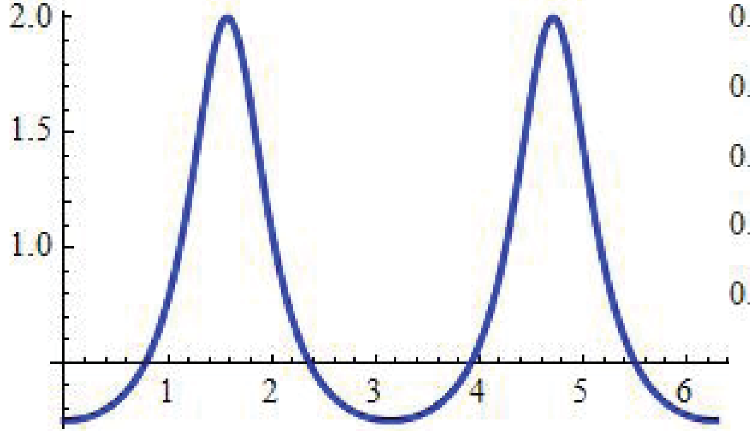
ANALISI DELLA CURVATURA

Per evidenziare la differenza geometrica tra l'epitrocoide e l'ellisse ho deciso di mettere a confronto i due grafici della curvatura.

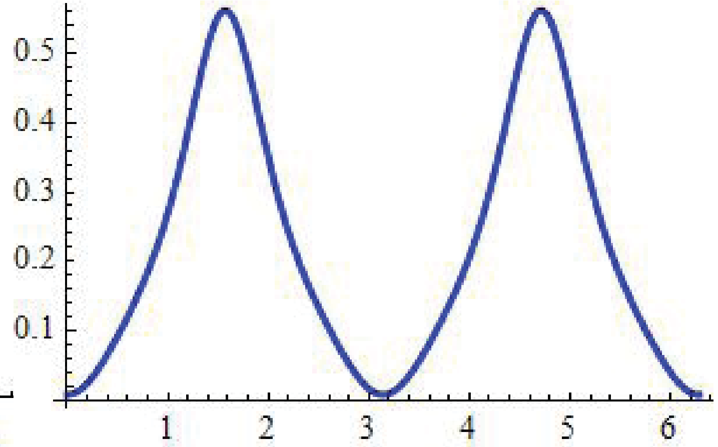
$$K=f''/(1+f'^2)^{3/2}$$



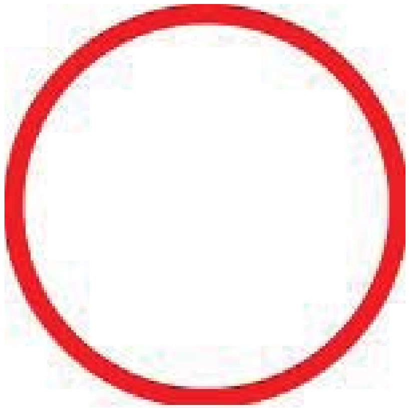
Nel caso della circonferenza la curvatura è, come dimostra il grafico costante, ed è pari al raggio.

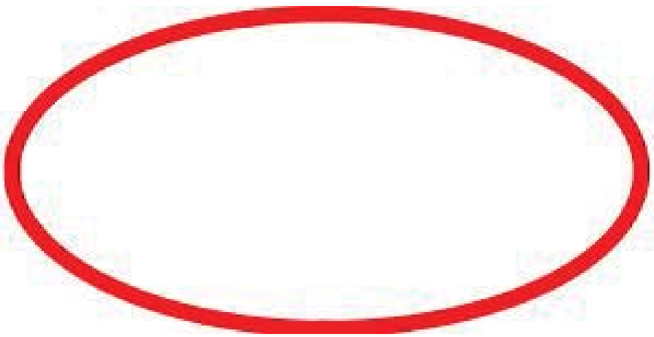


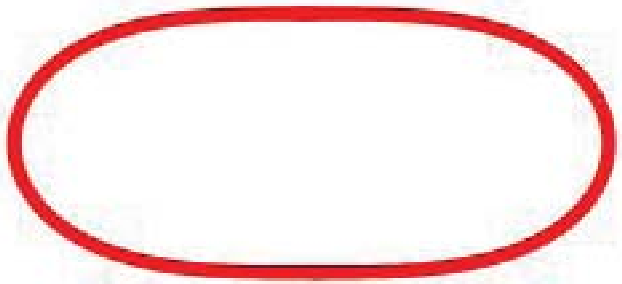
Per quanto riguarda l'ellisse ha dei valori della curvatura che diventano negativi per i valori delle ordinate, ed è all'apparenza alquanto simile ad una serie di parabole unite tra loro. Ci sono in tutto quattro punti, in cui la curvatura è 0, il cui lo è anche la derivata .



L'epitrocoide presenta i valori della curvatura sempre maggiori di zero, parti sommitali del grafico sembrano presentare delle analogie con le caratteristiche dell'ellisse, tuttavia i valori più bassi tornano a crescere molto più rapidamente. Inoltre nelle parti centrali la curvatura tende ad essere pari a 0, per un certo periodo delle ascisse, cosa che per l'ellisse non succede se non in forma puntuale..





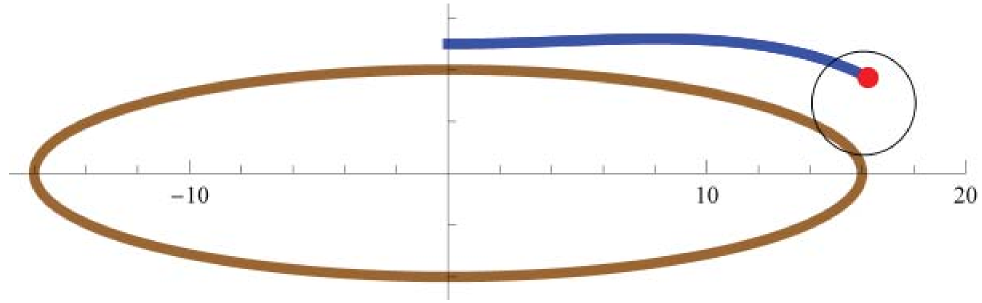


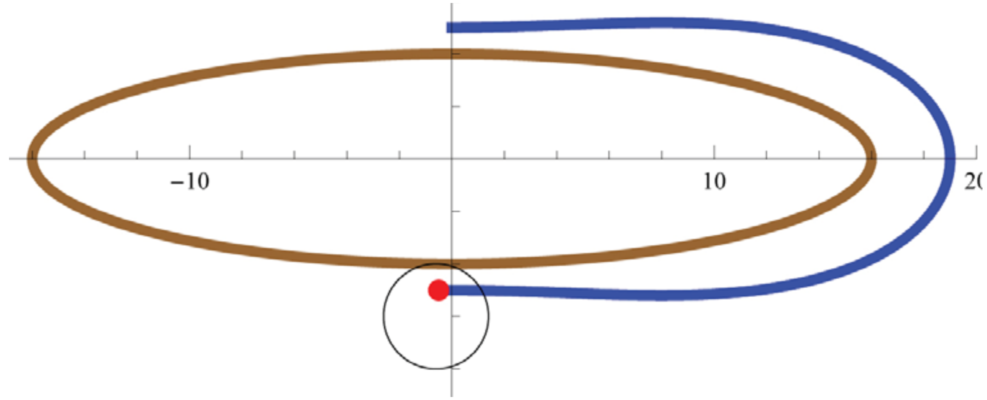
EPITROCOIDE DELLA VOLTA

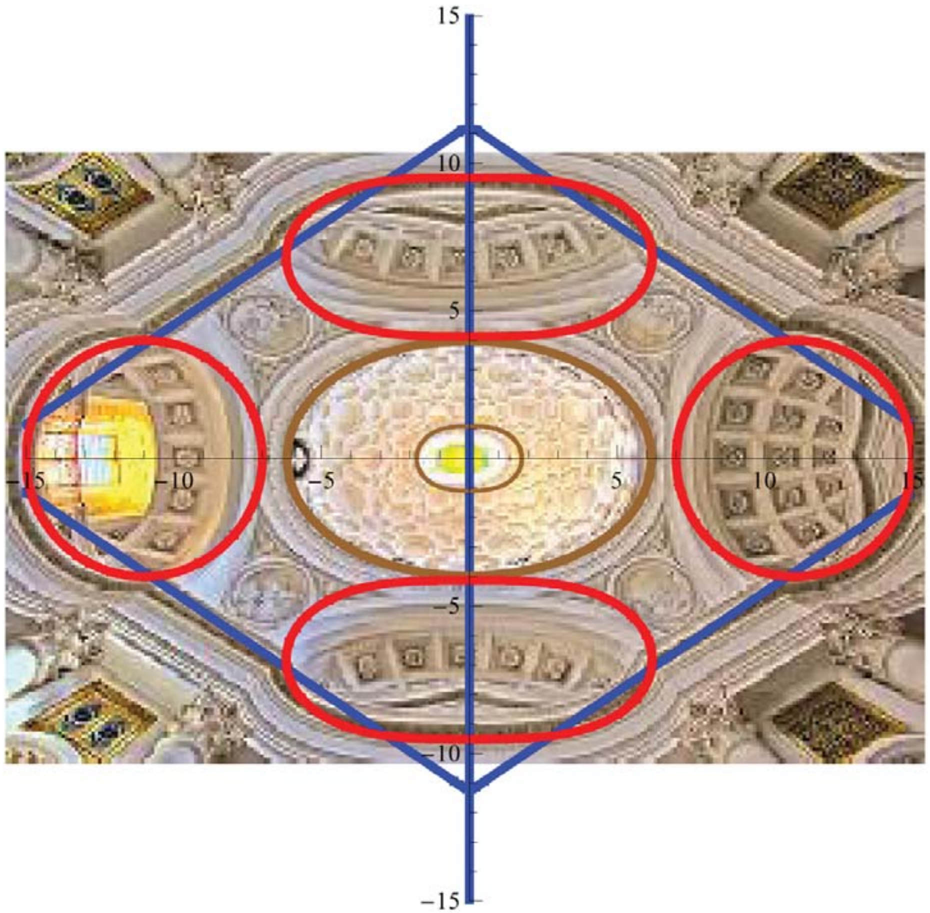
Per adattare le curve ho fatto variare alcuni parametri come la dimensione h che costituisce il punto su cui si disegna la curva lungo il raggio minore della circonferenza che 'ruota'; ho fatto variare anche il parametri c e d che ho moltiplicato per i termini della funzione che definivano in cerchio 'fisso' su cui ruota quello 'mobile', con lo scopo di farlo diventare un ellisse e di variarne le sue dimensioni.

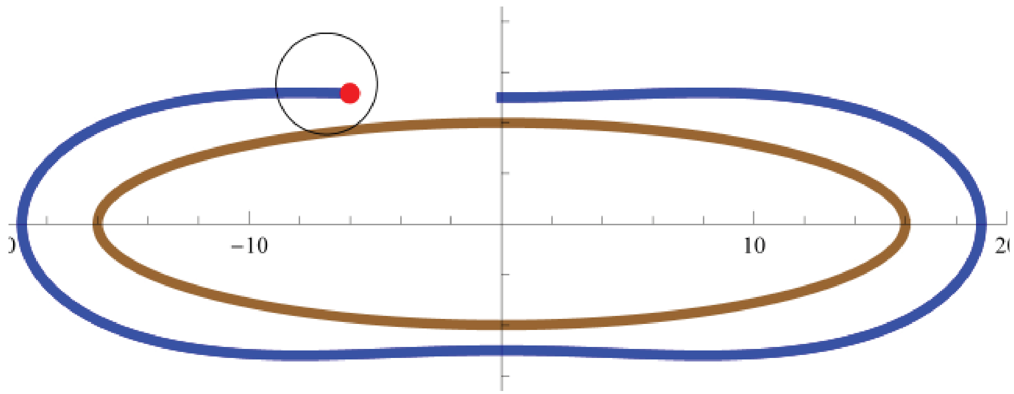
x= d*(a+b)*sin[t]-h*sin[(a+b)/b*t]

y= c*(a+b)*cos[t]-h*cos[(a+b)/b*t]



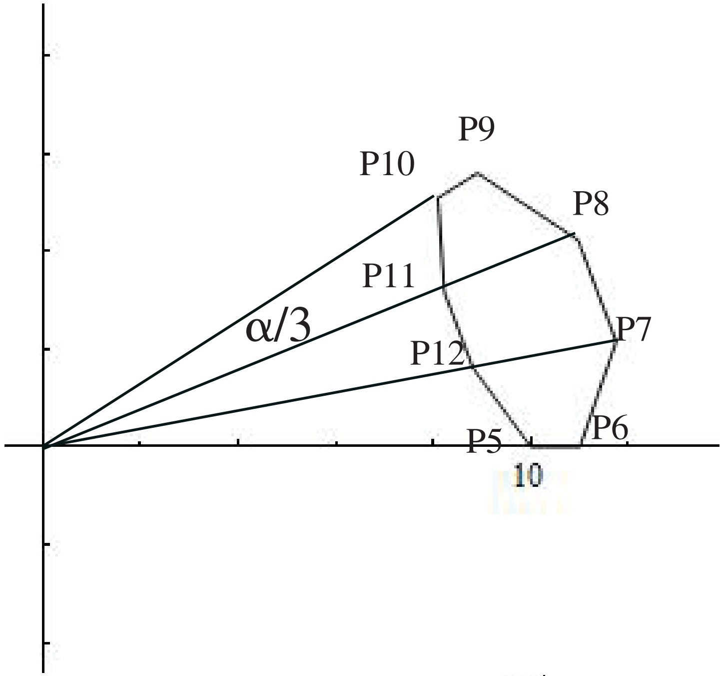


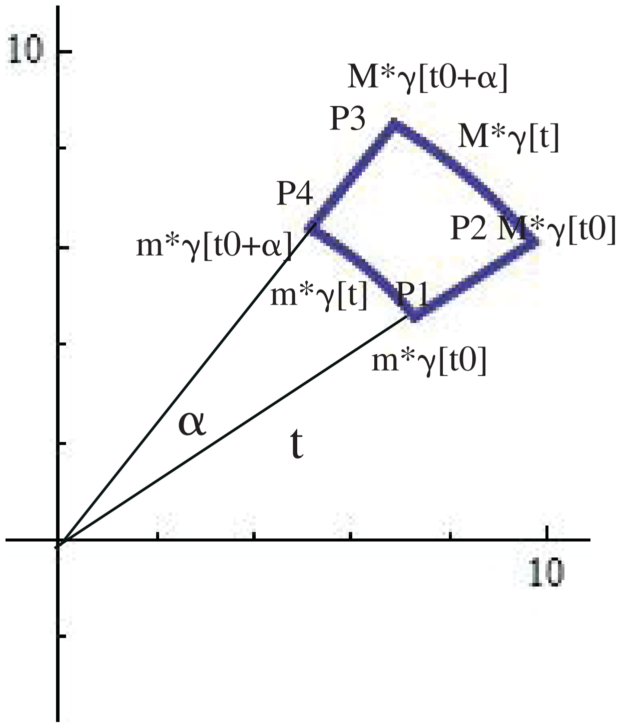




DECORAZIONI

Prendendo in considerazione la parte decorativa della calotta superiore della volta, ho potuto osservare che questa si sviluppa in base ad una matrice geometrica radiale. Tutte le figure che la costituiscono si sviluppano e si deformano in base ad una funzione circolare(nel caso specifico l'epitrocoide). Tuttavia la struttura non è soltanto radiale ma anche concentrica, infatti si sviluppa per corone di croci ed ottagoni alternati, sia veriticalmente che nella successione orizzontale. La sequenza è quindi procedendo per porzioni di circonferenza OTTAGONO-CROCE-OTTAGONO-CROCE-OTTAGONO e successiviamente CROCE-OTTAGONO-CROCE-OTTAGONO-CROCE. Per ricavare la forma originaria ho definitio una funzione 'gamma' che viene incrementata in base a due valoni: m, come valore minimo, M come massimo. Questa funzione parametrica varia quindi di un angono pari a t0+alfa, quindi ho potuto definire una linea di congiunzione tra il punto della parametrica calcolata sia all'inizio(t0) che alla fine(t0+alfa) dell'angolo. Da questo quadrante di base tramite delle linee ho descritto gli altri punti intermedi che andavano a descrivere le altre forme.





$P1=m^* \gamma(t0)$

$P2=M^* \gamma(t0)$

$P3=M^* \gamma(t0+\alpha)$

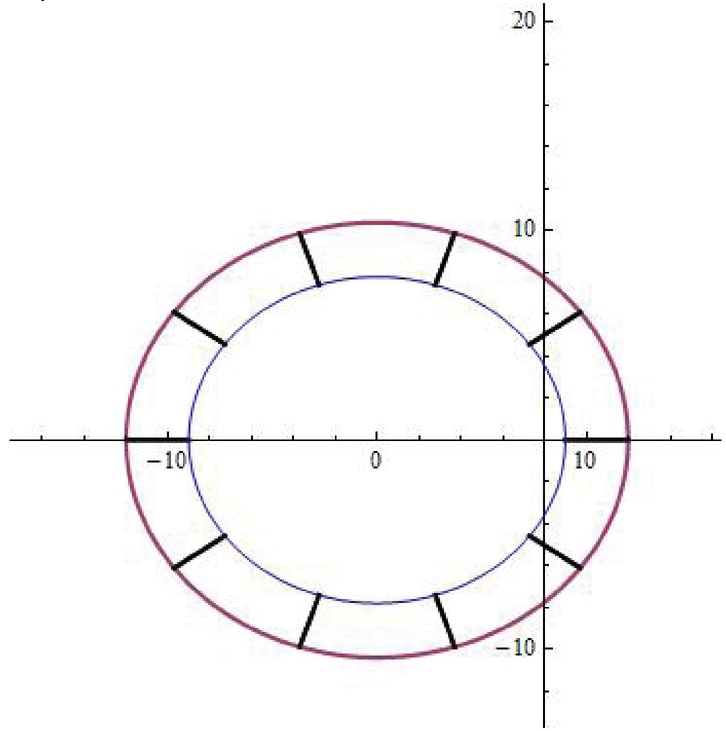
$P4=m^* \gamma(t0+\alpha)$

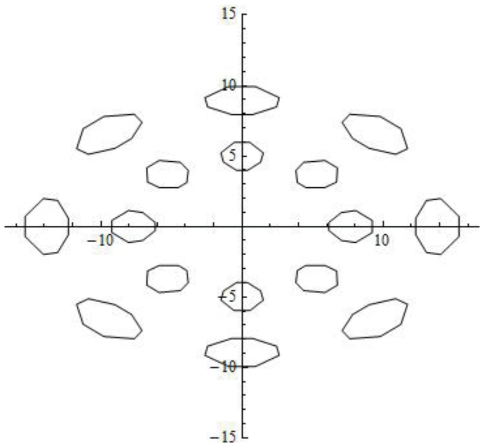
$P5=m^* \gamma(t0)+(M^* \gamma(t0)+m^* \gamma(t0)$

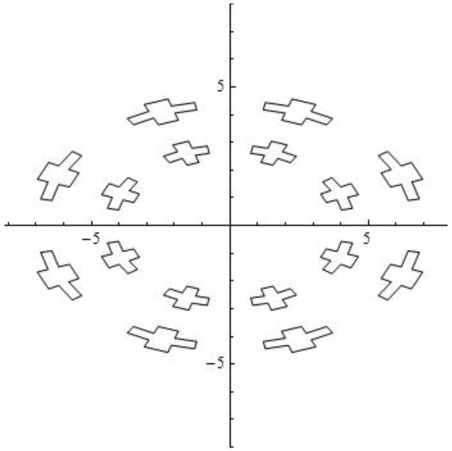
$P6= (M^* \gamma(t0)+m^* \gamma(t0)*2/3$

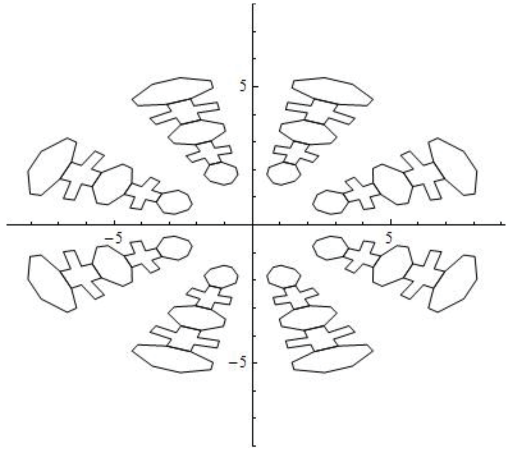
$P7= m^* \gamma(t0+\alpha/3)+(M^* \gamma(t0)+m^* \gamma(t0))*2/3$

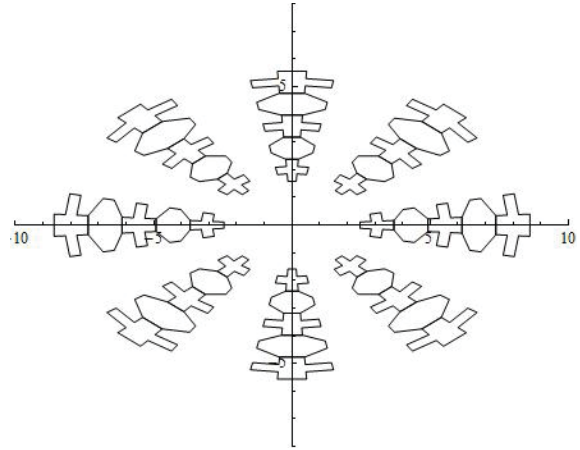
...

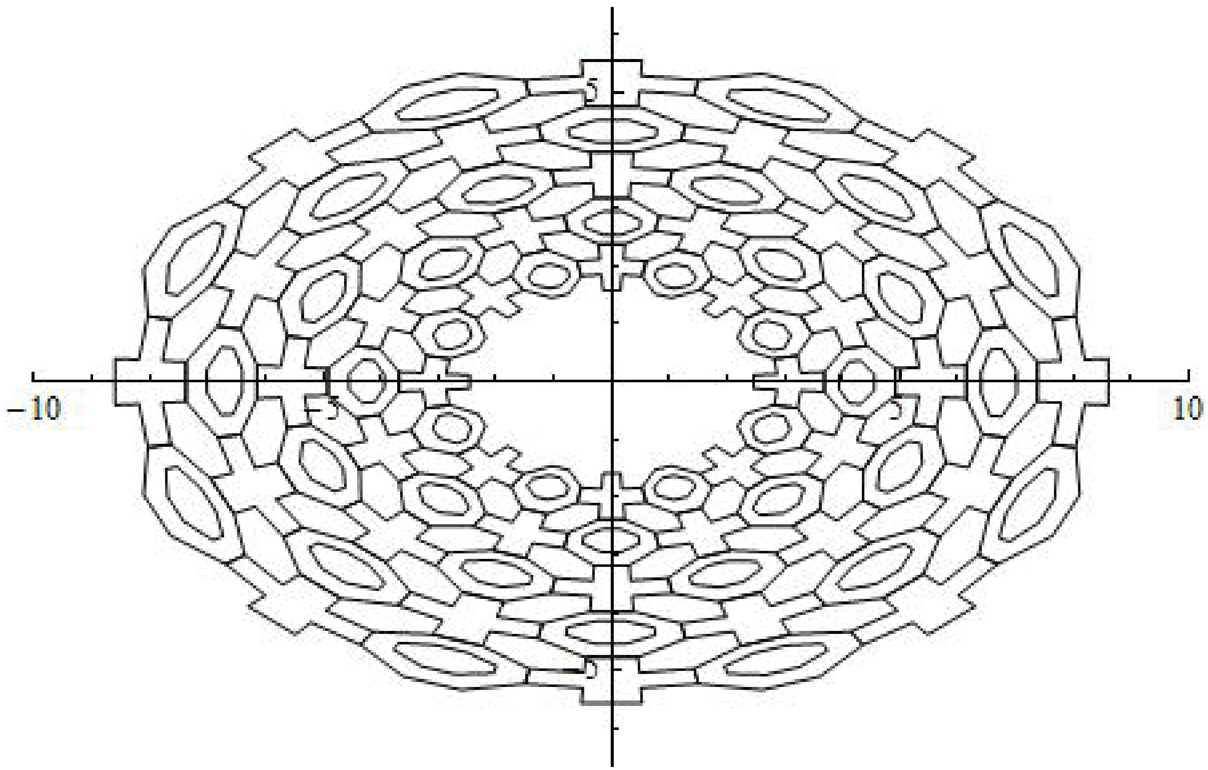


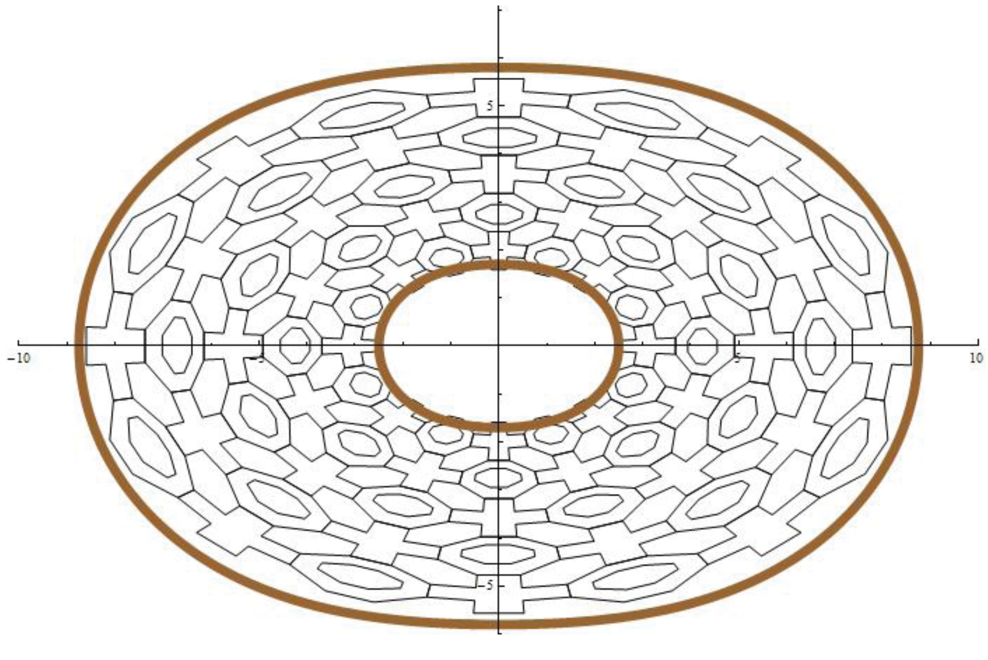

15
10
5
−10
10
−5
−10
−15


5
−5
5
−5


5
−5
5
−5

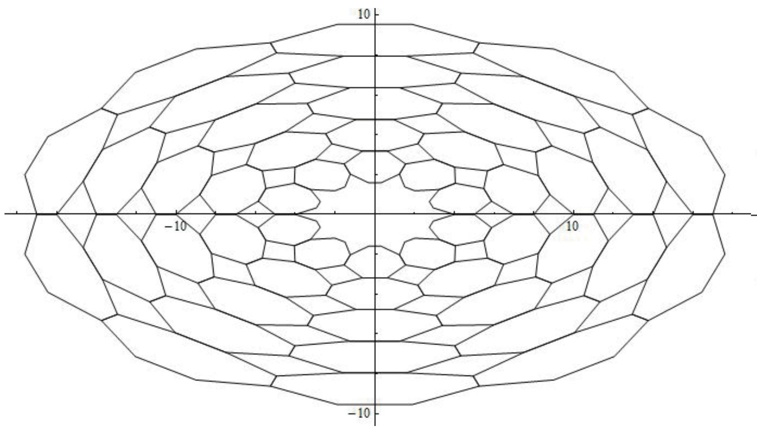

5
10
10
−5


5
−10
−5
5
10
−5

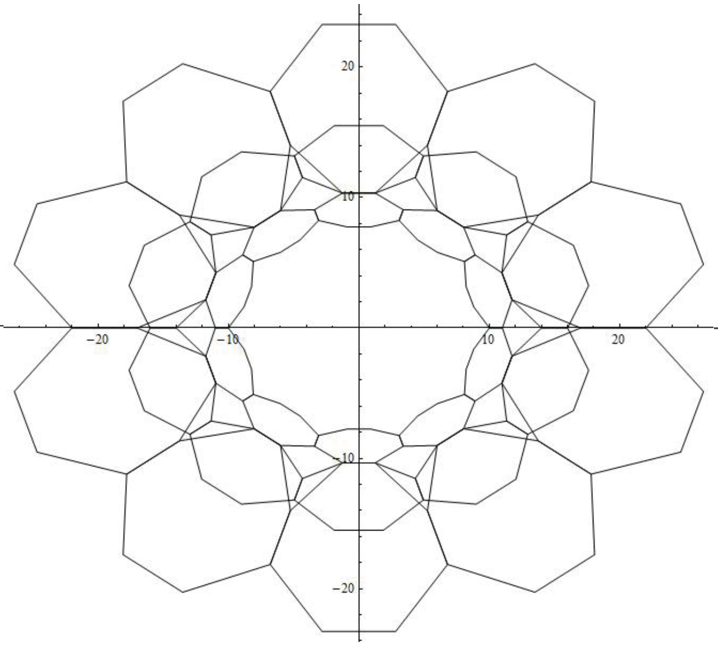


5
−10
−5
5
10
−5

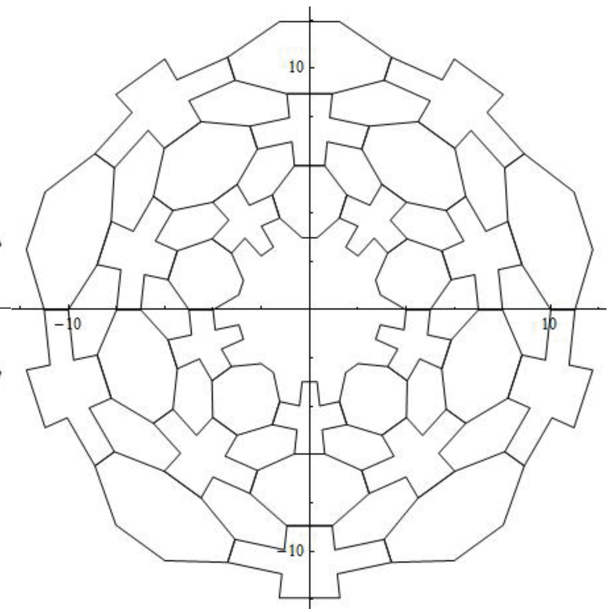
VARIAZIONE DI ALCUNI PARAMETRI



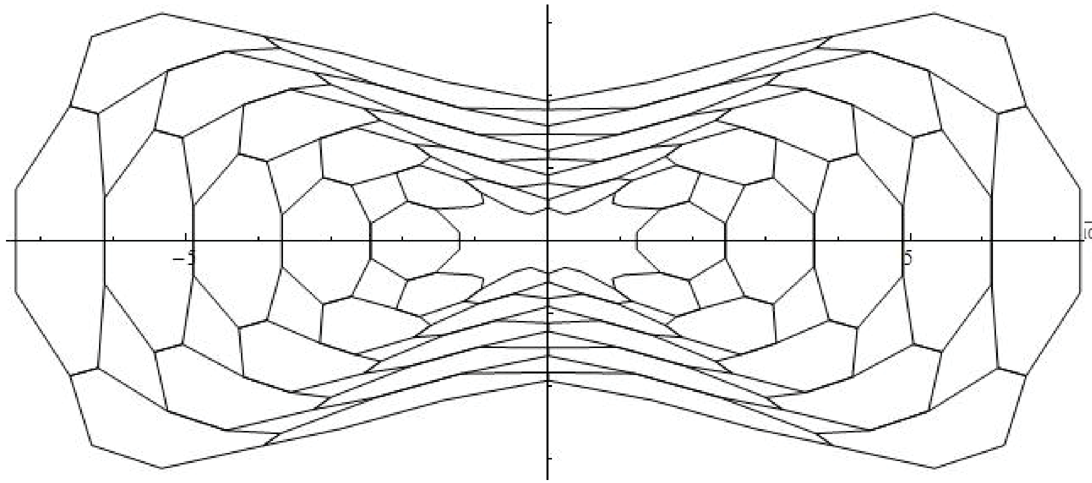
γ= ellisse



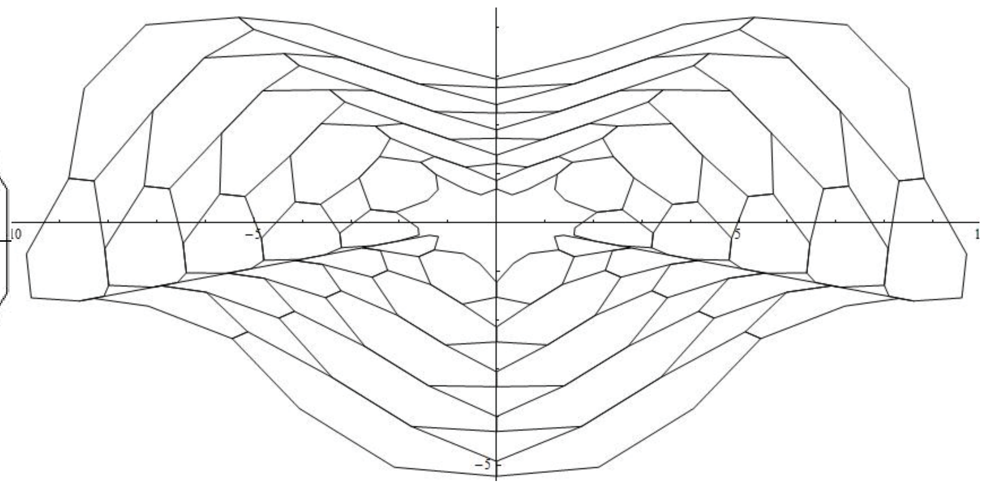
variazione rapporto m ed M su h



γ= cironferenza



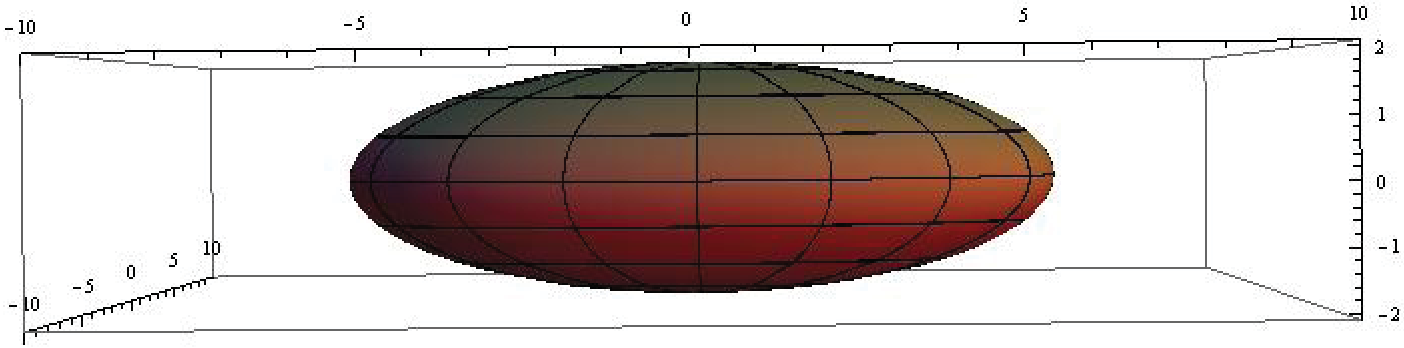
γ= epitrocoide -> a= 2b

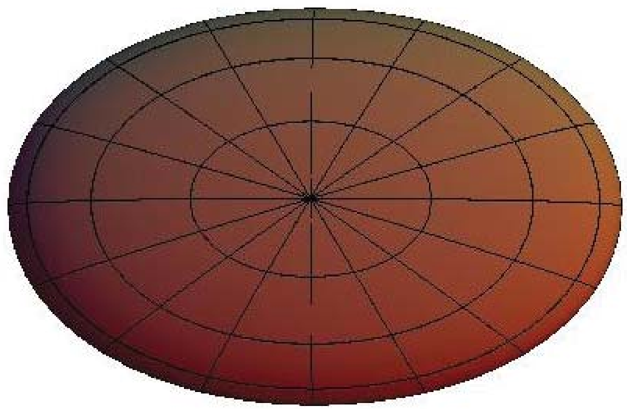


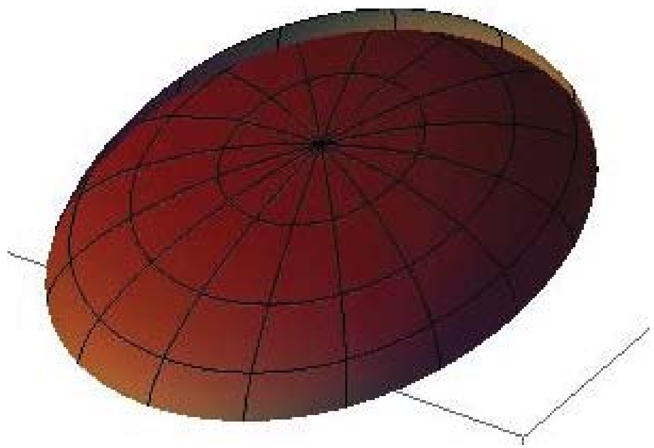
γ= epitrocoide -> a= 3b

STUDIO IN 3D

La volta di S.Carlo se in pianta risulta costruita su un imposta non ellittica, per quanto riguarda la sua elevazione verticale presenta non poche difficoltà di comprensione relative alla sua forma geometrica. In base alle immagini da me viste, e alla conoscenza di qualche disegno assonometrico, sono riuscito a interpretare la sezione verticale come quella di un'ellisse. Da un punto di vista volumetrico quindi la volta è strutturata su una superficie che in pianta è una epitrocoide ed in sezione, un'ellisse. Da un punto di vista matematico il punto di partenza è sempre stato quello della cicloide. Volendola trasformare in una superficie di rotazione, la ho moltiplicata per un vettore di rotazione che facesse ruotare i punti della curva secondo una traiettoria ellittica. Per quanto riguarda le absidi frontali e laterali queste sono delle porzioni, rispettivamente, di sfere e delle stesse superfici della volta. I pennacchi ho pensato che potessero essere descritti da un cono che avesse per base la cicloide, e si intersecasse per sottrazione booleana con le superfici delle absidi e della volta.



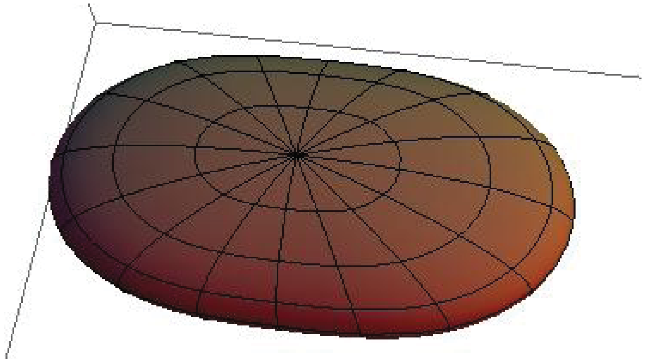




EPITROCOIDE:

x=(R+r)cos[t]-h*cos(R+r/r*[t])

y=(R+r)sin[t]-h*sin(R+r/r*[t]



h=0.5

ELLISSE (equazione parametrica):

x= a*sin[t]

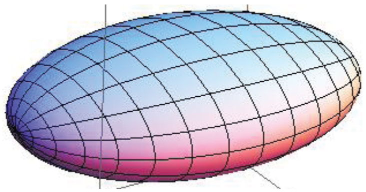
y= b*cos[t]

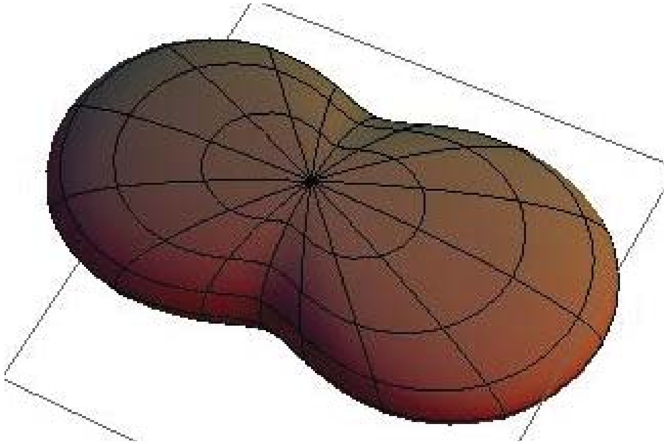
ELLISSOIDE[equazione parametrica):

x= a*sin[u]sin[v]

y= b*sin[u]cos[t]

z= c*cos[u]





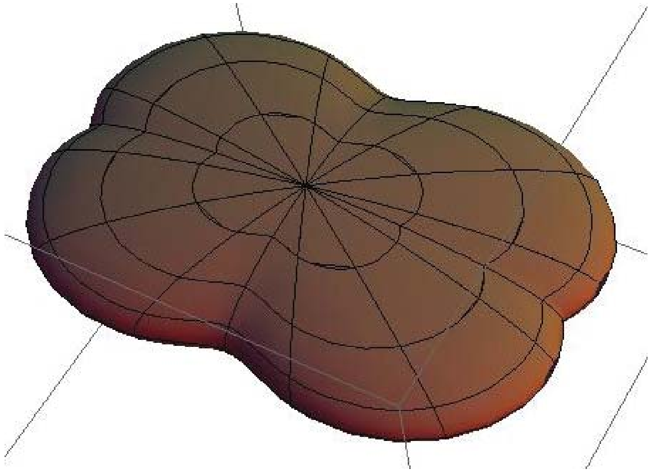
h=1.5

SUPERFICIE VOLTA:

x=A*((a+b)*sin[u]-h*sin[(a+b)/b*u])*sin[v]

y=B*cos[u]*(a+b]-h*cos[(a+b)/b*u])*sin[v]

z=C*cos[v]

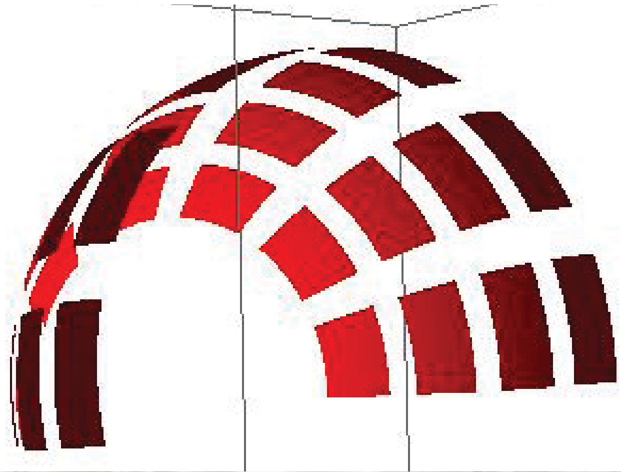


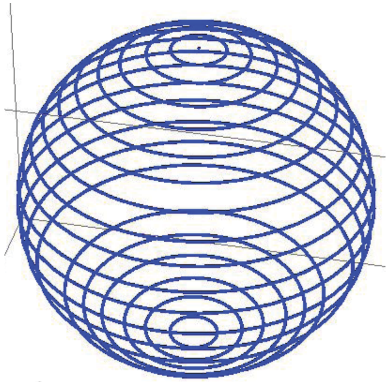
a=4b

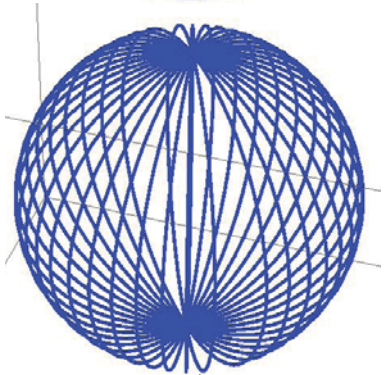
variando alcuni parametri è possibile ricavare diversi tipi di queste superfici in base, anche al tipo di epitrocoide piana da cui la superficie di rotazione viene generata...

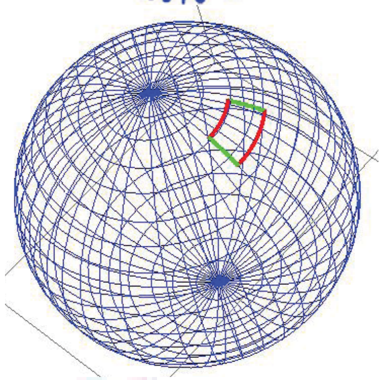
ELEMENTI VOLUMETRICI DELLA VOLTA

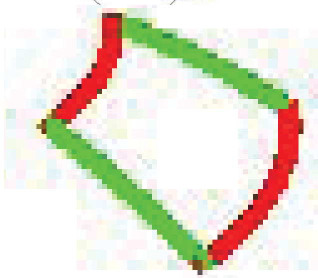
Per quanto riguarda le parti costitutive della volta ho considerato soltanto la parte ‘geometrica’ trascurando quella decorativa, tuttavia nelle absidi frontali ho cercato di descrivere le decorazioni a lacunari come porzioni ripetute di superfici sferiche.











PARALLELI: La funzione dei paralleli è stata ricavata da quella della sfera, moltiplicandola per k volte in altezza, con una delle due variabili costanti paria k.

SFERA:
x= r*sin[u]cos[v]
y= r*cos[u]sin[v]
z= r*cos[u]

u= k -> k*n

MERIDIANI: La funzione dei meridiani è stata ricavata da quella della sfera, moltiplicandola per k volte per un incremento dell’angolo di rotazione, con una delle due variabili costanti paria k.

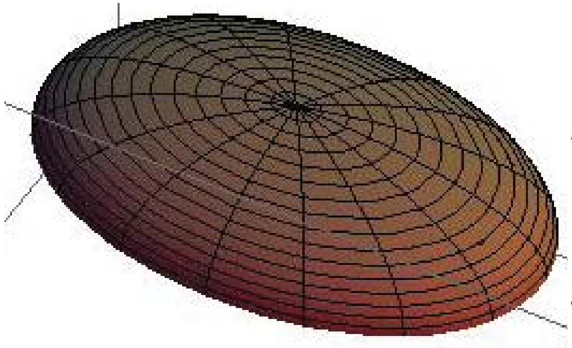
SFERA:
x= r*sin[u]cos[v]
y= r*cos[u]sin[v]
z= r*cos[u]

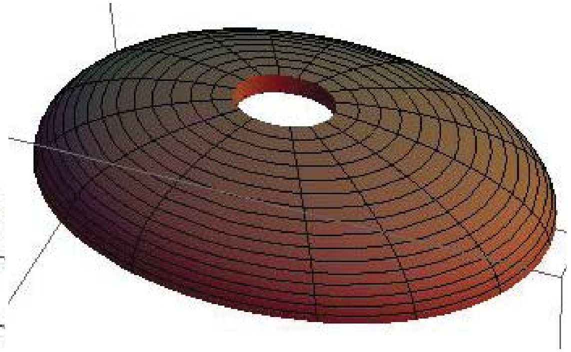
v= k -> k*n

QUADRANTE: Per ricavare le singole porzioni dei lacunari ho d quindi associato delle porzioni di meridiani e paralelleli, che variavano da quattro punti di partenza comuni:

u->(u0+α)
v->(v0+α)

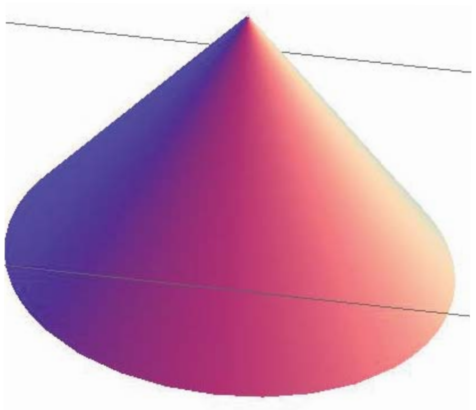
u0=v0

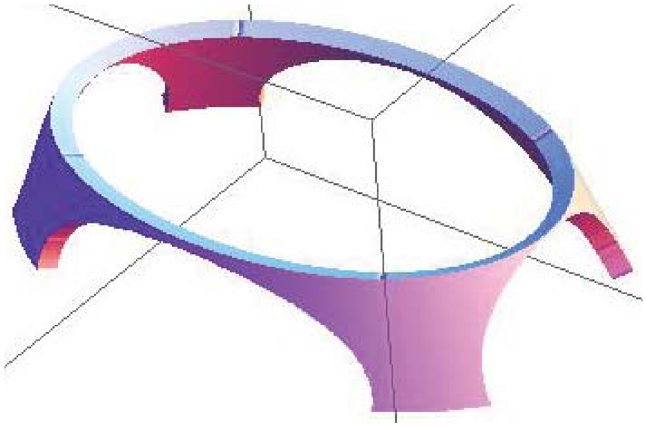




SOTTRAZIONE BOOLEANA DI VOLUMI

Per quanto riguarda la volta al fine di descrivere l' apertura dovute alla lanterna, l'operazione è stata alquanto semplice. Si è trattato infatto di far variare il parametro verticale non a partire da 0 ma da $2\pi/20$ fino a π. In effetti in questo caso non ho avuto nessuna necessità di effetuare una sottrazione giacchè la lanterna aveva una geometria come detto precedentemente concentrica ripetto alla variazione verticale della curva.





Per quanto riguarda i pennacchi invece sono partito da una forma conica del tipo:

x=d*(a+b)*sin[u]-h*sin[(a+b)/b*u])*v
y=(c*(a+b)*cos[u]-h*cos[(a+b)/b*u])*v
z=v

Le intersezioni con le cupole sono state fatte grazie ad sottrazioni booleane tra la superficie conica e quella dell'epitrocoide in 3D, e delle sfere.

Le absidi sono frutto della medesima sottrazione booleana effettuata tra la superficie conica e quelle delle superfici suddette .