Le successioni

Versione preliminare

Uno dei concetti fondamentali dell'analisi moderna é il concetto di limite. Per facilitare la comprensione del concetto di limite é meglio introdurlo in orima istanza nel caso discreto, cioé per le **succesioni** Dobbiamo quindi introdurre la nozione di successione. Intuitivamente una successione è un insieme infinito di numeri reali disposti in un particolare ordine. Più rigorosamente, una successione è una legge che associa ad ogni numero naturale un numero reale:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Usualmente si scrive a_n per l'elemento $n-$simo della successione. Per indicare tutti gli elementi della successione, si dovrebbe usare $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ma di solito si abbrevia con $\{a_n\}$.

Il comportamento della successione è interessante soprattutto quando n tende a ∞ ($n \longrightarrow \infty$), ma spesso è utile calcolare la successione per i primi valori di n. La rappresentazione grafica della successione aiuta a capire il suo comportamento iniziale: sull'asse delle ascisse vengono rappresentati i numeri naturali, mentre nell'asse delle ordinate si riportano i valori della successione a_n. Vediamo alcuni esempi

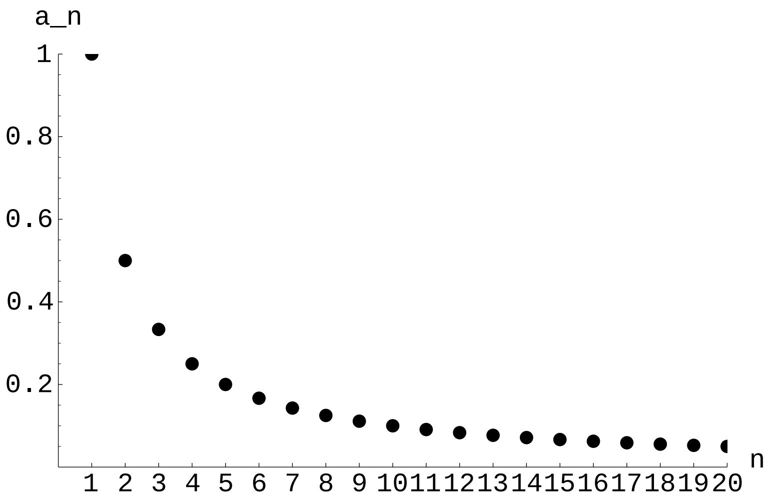
Esempio 1. *i)* $a_n = n - 1$.

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, ...

Questa successione cresce sempre più al crescere di n.

ii) $a_n = \frac{1}{n}$.

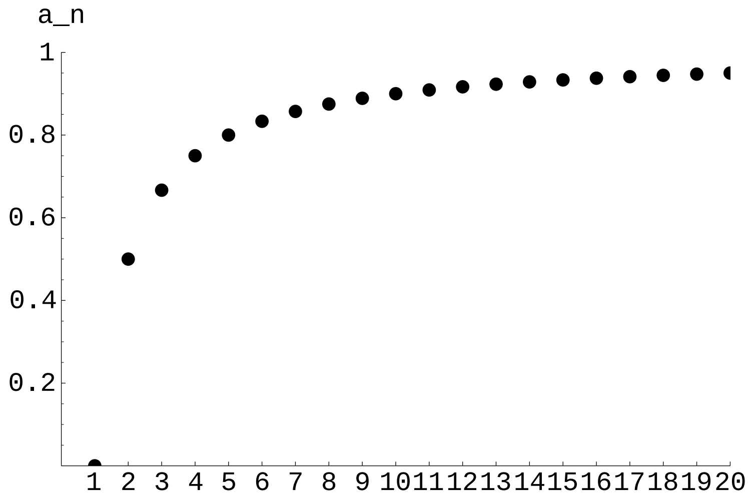
$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, graficamente si ha



Come si intuisce anche dal grafico al crescere di n a_n si avvicina sempre più a 0.

iii) $a_n = \frac{n-1}{n}$

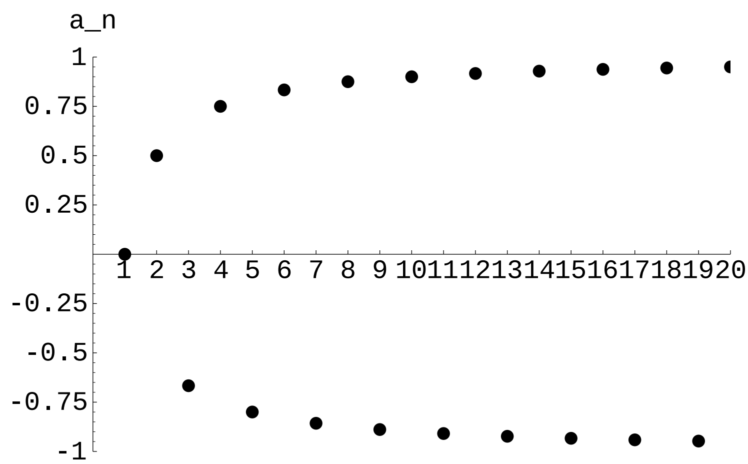
$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, ...



Questa successione si avvicina a 1 quando n cresce.

iv) $a_n = (-1)^{(n+1)} \frac{1}{n}$
$a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{4}$, ...
Questa successione si avvicina a 0 quando n cresce assumendo alternativamente valori positivi e negativi.

v) $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$
$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{4}$, ...

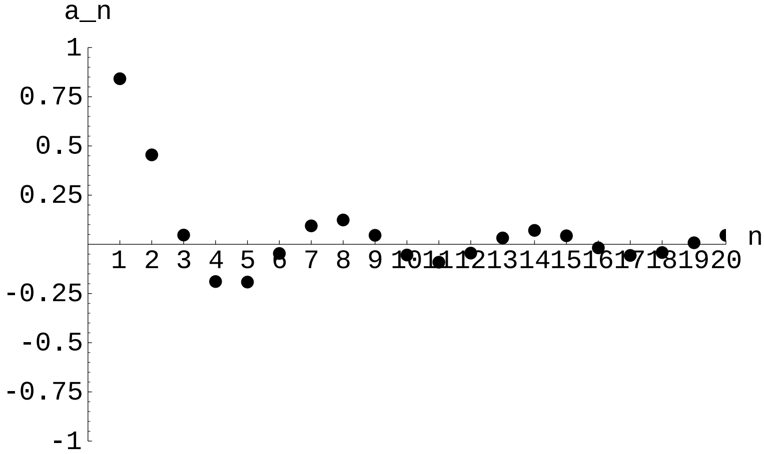


I temini dispari di questa successione si avvicinano a -1 al crescere di n mentre quelli pari si avvicinano a 1.

vi) $a_n = 3$
$a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, ...
Questa successione, assume sempre il valore 3. Le successioni di questo tipo si chiamano *successioni costanti*

vi) $a_n = \frac{\mathrm{sen}(n)}{n}$.

Di questa successione diamo solo la rappresentazione grafica:



Introduciamo ora il concetto più importante per quanto riguarda le successioni: il concetto di **limite**. Abbiamo già detto che siamo interessati al comportamento di $\{a_n\}$ per n arbitrariamente grande, simbolicamente quando $n \longrightarrow \infty$. In questo caso guardiamo come si comporta la successione e quindi se gli elementi a_n si avvicinano sempre di più a qualche numero fissato L, se diventano sempre più grandi, se diventano sempre più piccoli, o se si avvicinano alternativamente a costanti diverse. Nel primo caso diremo che la successione *converge* a L, nel secondo e terzo caso la successione *diverge* e nell'ultimo caso la successione *non converge*. Formalmente diamo le seguenti definizioni

Successioni convergenti.
Una successione $\{a_n\}$ si dice **convergente** a $L \in \mathbb{R}$ (e si scrive $\{a_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ o anche $\lim_{n\to\infty} a_n = L$) se:

$$\text{per ogni } \epsilon > 0 \text{ esiste } N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che se} n > N_\epsilon \text{ allora } |a_n - L| < \epsilon$$

Un altro modo equivalente per caratterizzare una successione $\{a_n\}$ convergente ad un numero reale L è il seguente: comunque fissato un intorno $I(L, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \big| |x - L| < \epsilon\}$ di centro L e raggio ϵ tutti i termini della successione tranne al più un numero finito appartengono ad $I(L, \epsilon)$. Cioè per ogni $I(L, \epsilon)$ a_n non appartiene ad $I(L, \epsilon)$ per qualche $n = 1, 2, 3, \ldots, N_\epsilon$ ed a_n appartiene ad $I(L, \epsilon)$ per ogni $n > N_\epsilon$.

Successioni divergenti a $+\infty$.
Una successione $\{a_n\}$ si dice **divergente** a $+\infty$ (e si scrive $\{a_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ o anche $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$) se:

$$\text{per ogni } M > 0, \text{ esiste } N_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n > M \text{ per tutti gli } n > N_M.$$

Successioni divergenti a $-\infty$.
Una successione $\{a_n\}$ è **divergente** a $-\infty$ (e si scrive $\{a_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ o anche $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$) se:

$$\text{per ogni } M > 0, \text{ esiste } N_M \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_n < -M \text{ per tutti gli } n > N_M.$$

Successioni non convergenti.
Una successione $\{a_n\}$ che non sia convergente o divergente si dice **non convergente**

Vediamo cosa possiamo dire sulle successioni che abbiamo visto nell'esempio precedente

Esempio 2. *i)* $a_n = n - 1$

Dato un qualsiasi $M > 0$ tutti gli $n > M + 2$ hanno la proprietà che

$$a_n = n - 1 > M + 2 - 1 > M$$

quindi a_n è divergente a $+\infty$

ii) $a_n = \frac{1}{n}$

Visto che al crescere di n il numero $\frac{1}{n}$ diventa sempre più piccolo pur rimanendo un numero positvo si intuisce che il limite della succesione deve essere 0. Dobbiamo però dimostrarlo usando la definizione di limite data sopra. Fissiamo $\epsilon > 0$. Voglio trovare $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ per cui, se $n > N_\epsilon$, allora $|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$. Poichè

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

scegliamo come N_ϵ un qualsiasi intero maggiore di $\frac{1}{\epsilon}$.

iii) $a_n = \frac{n-1}{n}$

Riscriviamo la successione come $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Per quanto visto in *ii)* si intuisce che il limite della succesione $a_n = \frac{n-1}{n}$ deve essere 1. Dobbiamo però dimostrarlo usando la definizione di limite data sopra. Fisso $\epsilon > 0$. Voglio trovare $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n > N_\epsilon$, allora $|a_n - 1| < \epsilon$ Poichè :

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

si ha che per tutti gli $n > \frac{1}{\epsilon}$ risulta $|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \epsilon$. Quindi scegliamo come N_ϵ un qualsiasi intero tale che $N_\epsilon > \dfrac{1}{\epsilon}$.

iv) $a_n = (-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}$

Il ragionamento usato nell'esempio *ii*) vale anche in questo caso. Infatti visto che $|-1| = 1$ si ha:

$$|a_n - 0| = \left|(-1)^{(n+1)}\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Quindi fissato $\epsilon > 0$ basta scegliere N_ϵ un qualsiasi intero tale che $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$ per avere che per ogni $n > N_\epsilon$ si abbia $|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$.

v) $a_n = (-1)^n\frac{n-1}{n}$

Come già notato in precedenza si ha che,al crescere di n, i temini dispari di questa successione si avvicinano a -1 mentre quelli pari si avvicinano a 1. Vediamo come formalizzare questa affermazione e dimostrare che a_n non converge. Fissiamo $\epsilon > 0$. Se $n > \frac{1}{\epsilon}$ è dispari

$$|a_n + 1| = |-\frac{n-1}{n} + 1| = |\frac{1}{n}| < \epsilon.$$

mentre se $n > \frac{1}{\epsilon}$ è pari

$$|a_n - 1| = |\frac{n-1}{n} - 1| = |\frac{1}{n}| < \epsilon.$$

Quindi "metà"della successione converge a -1 (la parte con gli n dispari) mentre l'altra metà converge $+1$(la parte con gli n pari). Poichè $1 \neq -1$ la successione non converge.

Vediamo adesso un teorema che generalizza l'esempio *v*), in cui abbiamo notato che non è possibile che la successione converga contemporaneamente a 1 e -1, cioè che il limite di una successione è univocamente determinato.

Teorema di unicià del limite. *Se* $\{a_n\} \longrightarrow L$ *allora* L *è unico.*

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema usiamo la dimostrazione per assurdo.

Supponiamo che esistano due limiti diversi: $\{a_n\} \longrightarrow L$, $\{a_n\} \longrightarrow L'$ con $L \neq L'$. Sia $\epsilon = \frac{|L-L'|}{3}$. Visto che $\{a_n\} \longrightarrow L$, allora $\exists N$ tale che $|a_n - L| < \epsilon \ \forall n > N$.

Visto che $\{a_n\} \longrightarrow L'$, allora $\exists N'$ tale che $|a_n - L'| < \epsilon \ \forall n > N'$. Allora $\forall n > N'' = \max\{N, N'\}$ si ha:

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \leq |L - a_n| + |a_n - L'| < 2\epsilon < |L - L'|$$

che è una contraddizione.

Operazioni sui limiti di successioni convergenti.

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni convergenti:* $\{a_n\} \longrightarrow L$, $\{b_n\} \longrightarrow L$. *Allora:*

(1) $\{a_n + b_n\} \longrightarrow L + M$
(2) $\{ca_n\} \longrightarrow cL \ \forall c \in \mathbb{R}$
(3) $\{a_n b_n\} \longrightarrow LM$
(4) *Se* $M \neq 0, b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ *allora* $\{\frac{a_n}{b_n}\} \longrightarrow \frac{L}{M}$.

Dimostrazione. La dimostrazione dei 4 casi è molto simile e quindi discutiamo solo il primo caso. Sappiamo che la successione $\{a_n\}$ è convergente e quindi:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - L| < \epsilon \ \forall n > N.$$

Inoltre la successione $\{b_n\}$ è convergente e quindi:

$$\forall \epsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \text{ tale che } |b_n - M| < \epsilon' \ \forall n > N'.$$

Fisso $\epsilon'' > 0$ e scelgo $\epsilon = \epsilon' = \frac{\epsilon''}{2}$ e $N'' = \max\{N, N'\}$.

Allora

$$|a_n + b_n - L - M| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\epsilon''}{2} + \frac{\epsilon''}{2} = \epsilon''$$

e quindi la successione somma $\{a_n + b_n\}$ converge ad $A + B$.

Esempio 3. *i)* Consideriamo la successione $\{a_n\} = \frac{7+11n}{5n}$. Si ha che

$$\frac{7 + 11n}{5n} = \frac{7}{5n} + \frac{11n}{5n} = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{11}{5}.$$

Quindi visto che $b_n = \frac{7}{5}\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a 0 (per (1) e (2) visti sopra) e che $c_n = \frac{11}{5}$ converge a $\frac{11}{5}$ si ha, di nuovo usando (1) che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7 + 11n}{5n} = \frac{11}{5}$$

ii) $a_n = \dfrac{7n^2 - 3n + 2}{5n^2 + n + 3}$.

Dividendo numeratore e denominatore per n (che equivale a moltiplicare a_n per 1, otteniamo:

$$a_n = \frac{7n^2 - 3n + 2}{5n^2 + n + 3} = \frac{7 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

Posto $b_n = 7 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$ e $c_n = 5 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}$, abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 7 - \frac{3}{n} + \frac{2}{=}7$$

e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} = 5$$

e quindi $\{a_n\} \to \dfrac{7}{5}$.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **limitata** se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio 4. *i*) Ogni successione convergente è limitata. Infatti se $\{a_n\} \longrightarrow L$, allora preso $\epsilon = 1$ si ha che esiste $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N_1$ si ha $|a_n - L| < 1$. Quindi per ogni $n > N_1$ si ha $|a_n| < 1 + L$. Poichè gli $n \in \mathbb{N}$ più piccoli di N_1 sono un numero finito possiamo sempre trovare il più grande fra di loro, cioè poniamo

$$M_1 = \max_{1 \leq n \leq N_1} |a_n|.$$

Allora posto $M = \max\{L + 1, M_1\}$ abbiamo che $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) La successione $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$ è limitata visto che $|a_n| \leq 1$ ma non é convergente .

iii) La successione $a_n = 3 + \operatorname{sen}(n)$ è limitata; infatti $|a_n| \leq 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Operazioni sui limiti di successioni II. *Sia $\{a_n\}$ una successione limitata e sia $\{b_n\}$ una successione divergente a $+\infty$. Allora:*

(1) $\{a_n + b_n\} \longrightarrow +\infty$
(2) $\{\frac{a_n}{b_n}\} \longrightarrow 0$
(3) *Assumiamo che $a_n \longrightarrow L \neq 0$, allora $\{a_n b_n\} \longrightarrow +\infty$*
(4) *Se $C > 0$ è una costante allora $\{C b_n\} \longrightarrow +\infty$*

Dimostrazione. Come per il teorema precedente discutiamo solo un caso e precisamente il (3). Poichè $a_n \longrightarrow L \neq 0$ abbiamo che esiste N_0 tale che

$$|a_n - L| < \frac{L}{2} \text{ per ogni } n > N_0.$$

Quindi per ogni $n > N_0$ si ha:

$$\frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2}.$$

Dato $M > 0$ poichè $b_n \longrightarrow +\infty$ esiste N'_M tale che $b_n > \frac{2M}{L}$ quando $n > N_1$. Allora per ogni $n > \max\{N'_M, N_0\}$ si ha

$$a_n b_n > \frac{L}{2} b_n > \frac{L}{2} \frac{2M}{L} = M$$

e quindi $\{a_n b_n\}$ diverge a $+\infty$.

La condizione che $a_n \longrightarrow L \neq 0$ nella parte (3) del precedente teorema è necessaria come si evince dal seguente esempio

Esempio 3. Sia $a_n = \frac{1}{n^2}$. Consideriamo le seguenti successioni che divergono a $+\infty$: $b_n = n$; $c_n = n^2$; $d_n = n^3$. Allora

$$
\begin{aligned}
a_n b_n &= \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
a_n c_n &= \frac{n^2}{n^2} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \\
a_n d_n &= \frac{n^3}{n^2} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}
$$

Analogamente si possono dare dei criteri quando $\{b_n\} \to -\infty$ e cosi via. La seguente tabella riassume le nostre conoscenze sulle operazioni con i limiti: il punto interrogativo sta a significare che a priori non si può dire niente e si deve analizzare caso per caso (vedi esempio qui sopra):

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
L	$M \neq 0$	$L + M$	LM	$\frac{L}{M}$
$L > 0$	0	L	0	?
$L < 0$	0	L	0	?
0	0	0	0	?
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	?	0
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$L < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
0	$-\infty$	$-\infty$	?	0
$+\infty$	$M > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$M < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	?	?
$-\infty$	$M > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$M < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	0	$-\infty$	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Alcuni dei punti interrogativi sono facilmente eliminabili per alcuni sottocasi, per esempio: supponiamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Se sappiamo che $b_n > 0$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ allora:[1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

[1] In realtà basta di meno: è sufficiente che esista N_0 tale che $b_n > 0$ per tutti gli $n > N_0$.

Come si vede si incontrano problemi quando b_n tende a 0 in modo alternante per esempio $b_n = \frac{\mathrm{sen}(n)}{n}$. Infatti in quasto caso la successione $\frac{a_n}{b_n}$ (con a_n come sopra) non converge.

Il seguente teorema è di fondamentale importanza nel calcolo dei limiti di successioni.

Teorema del confronto. *Siano* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *tre successioni tali che*

$$b_n \leq a_n \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(1) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. *Allora* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.
(2) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Allora* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
(3) *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$. *Allora* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima affermazione. Le dimostrazioni delle altre due affermazioni seguino la stessa linea dimostrativa e sono lasciate per esercizio al lettore. Sia $\epsilon > 0$ fissato. Per ipotesi abbiamo che sia b_n che c_n convergono ad L e quindi esistono N_ϵ^b e $N_\epsilon c$ tali che se $n > N_\epsilon^b$ allora $|b_n - L| < \epsilon$ e se $n > N_\epsilon^c$ allora $|c_n - L| < \epsilon$. Se denotiamo con N_ϵ il piú grande tra N_ϵ^b e N_ϵ^c abbiamo che per $n > N_\epsilon c$ si ha

$$L - \epsilon < b_n < L + \epsilon \quad \text{e} \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$$

per ipotesi abbiamo $b_n \leq a_n \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi otteniamo:

$$L - \epsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < L + \epsilon \text{ per ogni } n > N_\epsilon$$

che per definizione equivale a dire che a_n converge a L.

Esempio 5. *i)* $b_n = \dfrac{1}{2^n}$
Poichè:

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

abbiamo che, posto $a_n = 0$ e $c_n = \dfrac{1}{n}$, sono verificate le ipotesi del Teorema del confronto (visto che ben sappiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$), e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

ii) $b_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$.
In questo caso abbiamo che

$$-\frac{1}{2^n} \leq b_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ma abbiamo appena visto che $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ e sappiamo dal proposizione sulle operazioni sui limiti che $\lim\limits_{n\to\infty} -a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ se a_n converge , quindi: $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{2^n} = 0$ da cui possiamo concludere per il Teorema del confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$$

Adesso vediamo i limiti di alcune fra le successioni più frequentemente usate.

Limiti notevoli.

(1) *Sia* $a_n = \alpha^n$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & se\ x > 1 \\ 1 & se\ x = 1 \\ 0 & se\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Inoltre se $\alpha \leq -1$ a_n *non converge.*

(2) *Sia* $a_n = \alpha^{\frac{1}{n}}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(3) *Sia* $\{a_n\} = \{\frac{b_m n^m + \ldots . b_1 n + b_0}{c_k n^k + \ldots . c_1 n + c_0}\}$, *dove* $b_0, \ldots, b_m$, $c_0, \ldots$, c_k *sono numeri reali, allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty\ se\ m > k\ e\ b_m \cdot c_k > 0 \\ -\infty\ se\ m > k\ e\ b_m \cdot c_k < 0 \\ 0\ se\ m < k \\ \frac{b_m}{c_k}\ se\ m = k \end{cases}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

Dimostrazione.

(1) Sia $\alpha > 1$.

Allora $\alpha = 1 + h$ dove $h > 0$. Quindi, usando la disuguaglianza di Bernoulli, abbiamo:

$$\alpha^n = (1+h)^n \geq (1+nh)$$

Ora nh diverge a $+\infty$ quando n cresce e quindi la successione diverge.

Sia $0 < \alpha < 1$.

Allora $\alpha = \frac{1}{1+h}$ dove $h > 0$. Quindi, usando la disuguaglianza di Bernoulli, abbiamo

$$0 < \alpha^n = (1+h)^{-n} \leq (1+nh)^{-1} = \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}$$

Ora $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nh} = 0$ e quindi per il teorema del confronto, si ha $\{a_n\} = \{\alpha^n\} \longrightarrow 0$.

Sia $-1 < \alpha < 0$. Sia $\beta = -\alpha$, allora $< 0\beta < 1$. Quindi per quanto appena visto $\{b_n\} = \{\beta^n\} \to 0$ e $\{c_n\} = \{-\beta^n\} \to 0$. Poichè

$$-\beta^n \leq \alpha^n \leq \beta^n$$

per ogni $n \geq 1$, il teorema del confronto ci dice che $\{a_n\} = \{\alpha^n\} \longrightarrow 0$.

Sia $\alpha < -1$. La successione alterna valori positivi e negativi con il modulo crescente, e quindi la successione non converge.

(2)Sia $\alpha > 1$.

Allora $\alpha^{\frac{1}{n}} > 1$, quindi abbiamo $\alpha^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n$ con $b_n > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\alpha = (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n$$

e quindi :

$$0 < b_n \leq \frac{\alpha - 1}{n}$$

Il teorema del confronto ci assicura che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Da cui, per i teoremi sulle operazioni con i limiti, otteniamo:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 + b_n = 1 + \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

Sia $< 0\alpha < 1$.

Allora $\alpha^{\frac{1}{n}} < 1$, e quindi $\alpha^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+c_n}$ dove $c_n > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{1}{(1+c_n)^n} \leq \frac{1}{1+nc_n}$$

e quindi

$$\alpha = \left(\frac{1}{1+c_n}\right)^n = \frac{1}{(1+c_n)^n} \leq \frac{1}{1+nc_n}$$

da cui ricaviamo che

$$0 \leq c_n \leq \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{n}.$$

Il teorema del confronto ci dice che $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Per concludere usiamo i teoremi sulle operazioni con i limiti e abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 + h_n = 1 + \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

(3) Per trovare il limite di $\{a_n\} = \{\frac{b_m n^m + ...b_1 n + b_0}{c_k n^k + ...c_1 n + c_0}\}$, bisogna dividere il numeratore e il denominatore per la potenza massima di n, cioè per n^m se $m > k$, oppure per n^k se $m \leq k$. Poi si calcola il limite usando le operazione tra limiti e notando che $\frac{1}{n^q} \longrightarrow 0$ se $q > 0$.

(4) Consideriamo la successione $b_n = \sqrt{a_n} = \sqrt{n^{\frac{1}{n}}} = (\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}$. Allora $b_n > 1$ per ogni $n \geq 1$, quindi possiamo scrivere $b_n = 1 + c_n$ con $c_n > 0$. Ora per la disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$\sqrt{n} = b_n^n = (1+c_n)^n \geq 1 + nc_n.$$

Quindi

$$0 \leq c_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Allora

$$1 \leq a_n = b_n^2 = (1+c_n)^2 = 1 + 2c_n + c_n^2 \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}$$

e visto che $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{n} = 1$ il teorema del confronto ci dice che $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Le tecniche appena introdotte nell'ultimo punto ci permettono di dimostrare anche il seguente risultato:

Proposizione. *Sia $A > 1$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{A^n} = 0$$

per ogni $d \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Inizieremo dimostrando che $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{A^n} = 0$. Come nel caso della radice n-esima di n faremo vedere che la successione $b_n = \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{A}\right)^n}$ converge a 0. Ma allora anche $a_n = \frac{n}{A^n}$ converge a 0,in quanto $a_n = b_n^2$. Poichè $\sqrt{A} > 1$ possiamo scrivere $\sqrt{A} = 1 + h$ con $h > 0$ e la disuguaglianza di Bernoulli assicura che $(\sqrt{A})^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$. Dunque si ha

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{A}\right)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+nh} \leq \frac{1}{h\sqrt{n}}$$

applicando il teorema del confronto otteniamo che $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{A})^n}$ converge a 0. Per trattare il caso generale basta notare che

$$\frac{n^d}{A^n} = \overbrace{\frac{n}{\left(\sqrt[d]{A}\right)^n} \cdots \frac{n}{\left(\sqrt[d]{A}\right)^n}}^{d\,volte}$$

e che $\sqrt[d]{A} > 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{\sqrt[d]{A}^n} = 0$.

Successioni Monotone.

Una succesione a_n si dice *monotona crescente* se:

$$a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Similmente a_n si dice *monotona decrescente* se:

$$a_n \geq a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vediamo alcuni esempi di successioni monotone crescenti e decrescenti

Successioni monotone	
crescenti	decrescenti
n	$-n$
n^3+1	$1-n^2$
$-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
$\frac{n}{n-1}$	$\frac{n+1}{n}$
$\frac{3n^2-5}{2n^2+1}$	$\frac{n^2+n+1}{1-4n}$
2^n	$\sqrt[n]{3}$

La ragione per cui si studiano le successioni monotone e che risultano piú controllabili quando si cerca di calcolarne il limite, nel senso che o convergono ad un limite finito oppure divergono ma non possono non ammettere limite. Non dimostreremo questo risultato ma ci limiteremo ad enunciarlo formalmente qui sotto

Teorema. *(limiti di successioni monotone) Sia a_n una succesione monotona crescente (rispettivamente decrescente), allora*
a) Se a_n è limitata allora a_n è convergente.
b) Se a_n non è limitata allora a_n diverge a $+\infty$ (rispettivamente diverge a $-\infty$).

Usiamo subito questo teorema per dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge. Il valore di tale limite viene denotato con e ed é il famoso numero di Nepero. Per il teorema sulle successioni monotone ci basta far vedere che a_n è sia monotona (crescente) che limitata. A tale scopo ci serve introdurre un altra successione $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; se dimostriamo che

(1) a_n è monotona crescente cioè $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) b_n é monotona decrescente
allora si ha

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \;\forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi a_n oltre ad essere monotona crescente ànche limitata e quindi per il teorema sulle successioi monotone risulta essere convergente. Ci riamne quindi solo da verificare (1) e (2). Anche in questo caso useremo la disuguaglianza di Bernoulli, pecisamente faremo dopo alcune semplici manipolazioni algebriche vedremo che la disuguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \tag{(*)}$$

è equivalente alla disuguaglianza

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \tag{(**)}$$

e quest'ultima disuguaglianza é la disuguaglianza di Bernoulli per $h = -\frac{1}{(n+1)^2}$:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Ma facciamo esplicitamente i conti per dimostrare che (*) è vera se e soltanto se v̀era (**)

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{n}{n+1} \leq \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{n}{n+1} \leq \left(1\frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo verificato che a_n è monotona crescente. La verifica che b_n è monotona decrescente procede lungo le stesse linee e viene lasciata come utile esercizio.