Il Principio di Induzione

Versione preliminare

Fino a questo punto abbiamo visto due procedimenti per la dimostrazione di un teorema: direttamente o per assurdo. In realtà se si vuole dimostrare una proposizione riguardante i numeri naturali, è molto utile usare un altro metodo che si basa sul principio di induzione.

Principio di induzione:
Siano P_n le proposizioni che si vogliono dimostrare dipendenti da n. Supponiamo che

(1) P_1 sia vera
(2) se P_n è vera allora $P_{(n+1)}$ è vera

allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

La proprietà (1) si chiama la *base dell'induzione*, mentre (2) si dice il *passo induttivo*. Il principio di induzione è semplice da utilizzare ma vale solo per i numeri naturali e bisogna sapere in anticipo quello che si vuole dimostrare.

Vediamo alcuni esempi di questo procedimento.

D*imostrare per induzione che* 6 *divide* $n^3 + 5n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.
Base dell'induzione: $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$ che è divisibile per 6.
Passo induttivo: Supponiamo che 6 divida $n^3 + 5n$ (Ipotesi induttiva) e dimostriamo che 6 divide $(n+1)^3 + 5(n+1)$ (Tesi induttiva).
Si ha

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 5n + +3n^2 + 3n + 6 = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6.$$

Ora 6 divide $n^3 + 5n$ per ipotesi induttiva. Inoltre 6 divide $3n(n+1)$ perchè almeno uno tra n ed $n+1$ è pari, e per finire 6 divide 6. Quindi 6 divide $(n+1)^3 + 5(n+1)$.

D*imostrare per induzione che*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni $n \geq 1$. *Cioè la somma dei primi* n *numeri interi è* $\frac{n(n+1)}{2}$

Dimostrazione. Ricordiamo che per definizione

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

Base dell'induzione:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Passo induttivo: Assumiamo vero che

(Ipotesi induttiva) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

e dimostriamo che

(Tesi induttiva) $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Si ha che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

dove la seconda uguaglianza è data dall'ipotesi induttiva Ora semplici manipolazioni algebriche ci fanno giungere alla conclusione, infatti:

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

D*imostrare per induzione che*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

per ogni $n \geq 1$. Cioè la somma dei primi n numeri dispari è n^2

Dimostrazione.
Base dell'induzione:

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2-1 = 1 \qquad \text{e} \qquad 1^2 = 1$$

Passo induttivo: Assumiamo vero che

(Ipotesi induttiva) $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

e dimostriamo che

(Tesi induttiva) $$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

Si ha che

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\right) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

dove la seconda uguaglianza è data dall'ipotesi induttiva.

Con il principio di induzione si può provare la seguente disuguaglianza che utilizzeremo per confrontare successioni diverse

Disuguaglianza di Bernoulli, 1689. . *Sia* $h \in \mathbb{R}$ $h \geq -1$. *Allora*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione.

Usiamo il principio di induzione. Sia P(n): $(1+h)^n \geq 1 + nh$.
Base dell'induzione: $n = 1$: $(1+h) \geq 1 + h$ non c'è nulla da dimostrare.
Passo induttivo: Supponiamo che $(1+h)^n \geq 1 + nh$ e dimostriamo che $(1+h)^{n+1} \geq 1 + (n+1)h$. Si ha:

$$(1+h)^{(n+1)} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+nh)(1+h) = 1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$$

dove la prima disguaglianza segue dall'ipotesi induttiva e la seconda dal fatto che $nh^2 \geq 0$.