UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
“ROMA TRE”
FACOLTA’ DI ARCHITETTURA

Precorso di Matematica

Anna Scaramuzza

Anno Accademico 2005 - 2006
4 - 10 Ottobre 2005

INDICE

1. ALGEBRA

1.1 Equazioni lineari

Consideriamo l'equazione

$$2x - 4 = 8$$

Per risolverla dobbiamo trasformarla in qualcosa del tipo

$$x = \text{soluzione}$$

Procediamo, eliminando tutti i termini che sono meno legati alla x utilizzando il primo principio di equivalenza, che dice:

Principio 1. *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una equazione una stessa quantità si ottiene una nuova equazione equivalente alla data.*

Nel nostro caso eliminiamo -4, aggiungendo ad entrambi i membri 4 e otteniamo

$$2x = 12$$

Ora per eliminare il 2 basta dividere per due sfruttando il secondo principio di equivalenza. Tale principio dice:

Principio 2. *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per una stessa quantità non nulla si ottiene una nuova equazione equivalente alla data.*

quindi la soluzione è

$$x = 6$$

Osservazione. Il primo principio di equivalenza permette di trasportare un termine da una parte ad un'altra dell'uguale cambiando segno. $\diamondsuit$

1.2 Disequazioni lineari

Consideriamo la disequazione

$$2x + 5 > x - 4$$

Determinare la soluzione significa determinare i valori che si possono attribuire alla x perché la disequazione sia soddisfatta. Per procedere applichiamo il principio:

Principio 3. *Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione si ottiene una nuova disequazione equivalente alla data.*

Ottenendo

$$2x + 5 - x + 4 > 0$$

$$x > -9$$

tale principio permette di trasportare un termine da un membro all'altro della **disequazione cambiando segno**.
Consideriamo ora la disequazione

$$\frac{x}{2} > 5$$

Per risolverla dovremo moltiplicare la disequazione per 2. Lo possiamo fare applicando il principio:

Principio 4. *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità non nulla e positiva si ottiene una nuova equazione equivalente alla data.*

La soluzione è $x > 10$.
Se invece consideriamo la disequazione

$$4 - 3x > 0$$

per risolverla dobbiamo prima portare al secondo membro il numero 4 e poi dobbiamo dividere per -3. In questo caso, bisogna stare attenti perché:

Principio 5. *Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità non nulla e negativa si ottiene una nuova equazione equivalente alla data ma di verso opposto.*

Infatti la soluzione è

$$x < \frac{4}{3}$$

1.3 Sistemi lineari

Consideriamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + 3y - 6 & = & 6 - x \\ x - 2y & = & 7 - 2x - y \end{cases}$$

Prima di risolvere il sistema lo mettiamo in forma **normale** cioé separiamo i termini con le incognite dai termini noti. In questo caso, facendo i conti (che si fanno sfruttando i principi di equivalenza per le equazioni lineari), si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 3y & = & 12 \\ 3x - y & = & 7 \end{cases} \tag{1.1}$$

Osservazione. In genere è più difficile mettere un sistema in forma normale che non risolvere un sistema. $\diamondsuit$

Proviamo ora a risolvere un sistema. Per risolvere i sistemi si può procedere utilizzando uno dei seguenti metodi:

1) metodo di Cramer (vedi corso)
2) metodo di sostituzione
3) metodo di addizione
4) metodo del confronto

Consideriamo il sistema (**??**) e risolviamoli con gli ultimi tre metodi.

1. **Metodo di sostituzione**
   In entrambe le equazioni la x e la y devono assumere lo stesso valore, allora possiamo ricavare una delle due incognite da una delle due equazioni e sostituirla nell'altra equazione. In questo modo otteniamo un'equazione in una sola incognita che sappiamo risolvere.

   Osservazione. Sostituire la x o la y è indifferente e dipende dal sistema: conviene sempre sostituire l'incognita che si ricava più facilmente. ♢

   Ricaviamo dalla seconda equazione la y

   $$\begin{cases} 2x+3y &= 12 \\ y &= 3x-7 \end{cases}$$

   e sostituiamo il valore trovato nella prima equazione:

   $$\begin{cases} 2x+3(3x-7) &= 12 \\ \dots \end{cases}$$

   Sviluppando e facendo i conti si ottiene

   $$\begin{cases} 11x &= 33 \\ \dots \end{cases}$$

   e quindi la soluzione

   $$\begin{cases} x &= 3 \\ y &= 2 \end{cases}$$

2. **Metodo di addizione**
   Con questo metodo cerchiamo di rendere uguale ma di segno contrario uno dei termini che contiene una delle indeterminate.
   Consideriamo il sistema (**??**) e moltiplichiamo per 3 la seconda equazione:

   $$\begin{cases} 2x+3y &= 12 \\ 3x-y &= 7 \quad /3 \end{cases}$$

   allora otteniamo:

   $$\begin{cases} 2x+3y &= 12 \\ 9x-3y &= 21 \end{cases}$$

   Se ora sommiamo membro a membro (s.m.m.) otteniamo l'equazione

   $$11x = 33$$

Per risolvere il sistema consideriamo oltre a questa equazione una delle due equazioni date all'inizio (scegliamo quella più semplice!), quindi

$$\begin{cases} 11x & = & 33 \\ y & = & 3x - 7 \end{cases}$$

e si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} x & = & 3 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

3. **Metodo del confronto**
Con questo metodo ricaviamo da entrambe le equazioni una delle due indeterminate e confrontiamo i risultati:

$$\begin{cases} y & = & \frac{12-2x}{3} \\ y & = & 3x - 7 \end{cases}$$

Dal confronto, otteniamo un'equazione. In più per risolvere il sistema considereremo una delle equazioni date all'inizio.

$$\begin{cases} 3x - 7 & = & \frac{12-2x}{3} \\ y & = & 3x - 7 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 3 e la risolviamo

$$\begin{cases} 9x - 21 & = & 12 - 2x \\ \ldots & & \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x & = & 3 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

1.4 Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

Sia $a \in \mathbb{R}$ e definiamo

$$|a| \quad = \quad \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione:

$$|2x - 3| \quad = \quad 8$$

per risolverla, utilizziamo la definizione di valore assoluto dato prima e quindi trasformiamo l'equazione in due sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 3 & = & 8 \\ 2x - 3 & \geq & 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x + 3 & = & 8 \\ 2x - 3 & < & 0 \end{cases}$$

Il simbolo $\cup$ ci ricorda che l'insieme soluzione S dell'equazione è pari all'unione degli insiemi soluzione dei due sistemi scritti sopra.

Il primo sistema ha come insieme soluzione $S_1 = \{x = 2\}$ e il secondo l'insieme $S_2 = \{x = -2\}$ allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{x = \pm 2\}$.
Nel caso avessimo una disequazione, ad esempio

$$|3x + 5| < 1$$

si sostituisce la disequazione con i sistemi:

$$\begin{cases} 3x+5 & < & 1 \\ 3x+5 & \geq & 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -3x-5 & < & 1 \\ 3x+5 & < & 0 \end{cases}$$

Risolviamo le disequazioni e poi determiniamo le soluzioni dei sistemi. L'unione di tali insiemi da l'insieme soluzione della disequazione.

1.5 Prodotti notevoli

Alcuni particolari prodotti tra polinomi si chiamano prodotti notevoli.

1. **QUADRATO DI UN BINOMIO**
   $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. **CUBO DI UN BINOMIO**
   $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
3. **QUADRATO DI UN TRINOMIO**
   $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + CB$
4. **DIFFERENZA DI QUADRATI**
   $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
5. **SOMMA DI DUE CUBI**
   $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$
6. **DIFFERENZA DI DUE CUBI**
   $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^2 - B^2$

1.6 Equazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado in un'incognita x è un'equazione del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le soluzioni di questa equazione si calcolano utilizzando la formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

oppure nel caso in cui b sia un termine pari con la formula ridotta

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Chiamiamo **discriminante** la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$. A seconda del valore assunto da Δ possiamo stabilire se l'equazione ammette oppure no soluzioni di tipo reale. Infatti abbiamo i seguenti casi:

1. $\Delta > 0$
   In questo caso l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte.
2. $\Delta = 0$
   In questo caso l'equazione ammette due soluzioni reali e coincidenti.
3. $\Delta < 0$
   L'equazione non ammette soluzioni reali. Le soluzioni sono due e sono complesse e coniugate.

1.7 Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \end{aligned}$$

Per determinare le soluzioni procediamo nel seguente modo

- **I PASSO**:
  ci si riduce al caso in cui $a > 0$
- **II PASSO**:
  si risolve l'equazione di secondo grado associata: $ax^2 + bx + c = 0$.

A questo punto le soluzioni si determinano utilizzando la tabella:

Δ	segno diseq.	soluzione
> 0	> 0	$x < x_1$ e $x > x_2$
> 0	≥ 0	$x \leq x_1$ e $x \geq x_2$
> 0	< 0	$x_1 < x < x_2$
> 0	≤ 0	$x_1 \leq x \leq x_2$
$= 0$	> 0	$x \neq x_1 = x_2$
$= 0$	≥ 0	$\mathbb{R}$
$= 0$	< 0	non ci sono soluzioni
$= 0$	≤ 0	$x = x_1 = x_2$
< 0	> 0	$\mathbb{R}$
< 0	≥ 0	$\mathbb{R}$
< 0	> 0	non ci sono soluzioni
< 0	≤ 0	non ci sono soluzioni

Esempi 1. Consideriamo la disequazione

$$2x^2 + 5x - 3 > 0$$

Il coefficiente $a = 2$ è positivo quindi passiamo a risolvere l'equazione associata:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

la quale ammette due soluzioni distinte e reali perché $\Delta = 49 > 0$ e quindi la soluzione della disequazione è $x < -3$ e $x > \frac{1}{2}$.

Se invece consideriamo la disequazione

$$-x^2 + 4x + 4 > 0$$

allora dobbiamo rendere il coefficiente a positivo. Questo equivale a moltiplicare per -1 la disequazione e quindi andremo a cercare le soluzioni della disequazione equivalente

$$x^2 - 4x - 4 > 0$$

In questo caso possiamo calcolare le soluzioni con la formula ridotta perché $b = 4$ è pari. Le soluzioni sono due e sono distinte e quindi la soluzione della disequazione è $2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2}$.

1.8 Equazioni e disequazioni di grado superiore a 2

Sia $f(x)$ un polinomio in una variabile di grado $n > 2$. Supponiamo di voler determinare i valori della x per cui si ha che:

$$f(x) = 0 \tag{1.2}$$

oppure

$$f(x) < 0 \qquad f(x) > 0 \tag{1.3}$$

Allora si procede così:

1. si scompone il polinomio, utilizzando la scomposizione in fattori oppure il Teorema di Ruffini e si scrive il polinomio come prodotto di fattori lineari o di al più grado 2:

$$f(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x) \tag{1.4}$$

2. se si vogliono determinare le x tali che valga (**??**) si pongono a zero tutti i fattori $f_i(x)$: l'insieme dato da tutte le soluzioni delle equazioni

$$f_i(x) = 0 \tag{1.5}$$

   per ogni $i = 1, \ldots, k$ fornisce l'insieme delle soluzioni dell'equazione (**??**).

   Se invece si vogliono determinare le x tali che valga (**??**) si considerano le disequazioni $f_i(x) > 0$. Riportando i risultati ottenuti in una tabella e utilizzando le elementari regole dell'algebra si determina dove è verificata $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$.

1.9 Equazioni e disequazioni di funzioni razionali

Siano $N(x), D(x)$ due polinomi in una variabile. Supponiamo di voler determinare i valori della x per cui si ha che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 0 \tag{1.6}$$

oppure

$$\frac{N(x)}{D(x)} < 0 \qquad \frac{N(x)}{D(x)} > 0 \tag{1.7}$$

L'insieme delle soluzioni di ottiene procedendo in questo modo:

1. si determinano le x per cui $D(x) = 0$: queste si dovranno escludere;
2. se si vogliono determinare le x tali che valga (**??**) si pone a zero $N(x)$: l'insieme dato da tutte le soluzioni di

   $$N(x) \;=\; 0 \tag{1.8}$$

   escluse quelle per cui $D(x) = 0$ costituisce l'insieme delle soluzioni dell'equazione (**??**).

   Se invece si vogliono determinare le x tali che valga (**??**) si considerano le disequazioni $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$. Riportando i risultati ottenuti in una tabella e utilizzando le elementari regole dell'algebra si determina dove è verificata $N(x)/D(x) > 0$ o $N(x)/D(x) < 0$.

1.10 Potenze e Logaritmi

Siano a, b dei numeri reali positivi e α, β dei numeri interi positivi allora possiamo definire a^α e b^β. per questi numeri valgono le seguenti regole:

1. $a^0 = 1$
2. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;
3. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$;
4. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\cdot\beta}$;
5. $(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$;
6. $(a : b)^\alpha = a^\alpha : b^\alpha$;
7. $a^{-1} = \frac{1}{a}$;
8. $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$;
9. $a^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{a}$;
10. $a^{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{a^\beta}$;

Definite le potenze di un numero uno potrebbe cercare di risolvere delle equazioni esponenziali, cioé equazioni in cui l'incognita è un esponente. Per esempio, si potrebbe cercare di risolvere l'equazione

$$2^x = 64$$

che ha per soluzione $x = 6$ in quanto $64 = 2^6$.
In generale, in un'equazione esponenziale del tipo

$$a^x \;=\; b \tag{1.9}$$

dove $a > 0, \neq 1$, $b > 0$, determinare la soluzione significa determinare l'esponente da dare ad a per ottenere b.
Tale numero viene detto **logaritmo in base b di a** e lo si denota con

$$x = \log_a(b) \tag{1.10}$$

Vediamo degli esempi esliciti:

1. $3^x = \frac{1}{9}$, sol. $x = -2 = \log_3(3^{-2})$;
2. $3^x = 5$, sol. $x = -2 = \log_3(5)$;
3. $2^{x-1} = \frac{1}{4}$, sol. $x = -1$;
4. $\log_7(7)$, sol. $x = 1$;
5. $\log_5(125)$, sol. $x = 3$;
6. $\log_2(1024)$, sol. $x = 10$;
7. $\log_{10}(100)$, sol. $x = 2$;
8. $2^x = \frac{1}{8}$, sol. $x = -3$;
9. $7^x = 9$, sol. $x = \log_7(9)$;
10. $(2/3)^x = \frac{27}{8}$, sol. $x = -3$;
11. $(1/2)^x = 2$, sol. $x = -1$;
12. $3^{2x+1} = 1$, sol. $x = -1/2$;

1.11 Esercizi di Riepilogo

Esercizio 1. Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $\frac{2x-3}{2} - \frac{x-1}{3} < 4 + x$
2. $\frac{7-3x}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x}{3}$
3. $\frac{\frac{2}{3}x-1}{\frac{1}{3}-1} - \frac{\frac{4-x}{2}}{1-\frac{1}{4}} < 5 - x$
4. $\frac{\frac{x-2}{3} - \frac{x-4}{2}}{\frac{1}{4}} - \frac{5}{6}x < \frac{5-2x}{12}$

Esercizio 2. Si determini la soluzione dei seguenti sistemi:

1.

$$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x-3 = 0 \\ 3x-y = 0 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} 2x-3 = 0 \\ 2x-3y = 0 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 3x+4y+5 = 0 \\ x+y-4 = 0 \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} 4x-2y+1 = 0 \\ x+y-4 = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} x+y-4 = 0 \\ x-y-3 = 0 \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} x-3y+5 = 0 \\ 4x-y-2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Risolvere le sequenti equazioni

1. $|3x+5| = 0$;
2. $|3x^2-2x+5| = 6$;
3. $|x^2-16| = 12$;
4. $|2x-5| = x-2$.

Esercizio 4. Risolvere le seguenti disequazioni

1. $|3x+2| < 8$ sol. $-10/3 < x < 2$;
2. $\frac{|2x+1|}{3x-x} < 1$ sol. $-4 < x \leq 2/3$;
3. $|7-x^2| > 2$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti disequazioni lineari

1. $x(2-x)^2+4(x+4)^2 < x^3-8+\frac{3x-6}{5}$
2. $(2-x^2)^2-x^2(x^2+5) > 9(x+1)(2-x)+\frac{x+7}{2}$
3. $3(x^2+x+1)^2-3x^2(x^2+2x+3)-x-3 > 21$

Esercizio 6. Risolvete le seguenti equazioni di secondo grado:

1. $8x^2 - 4x(2x-1) + 4x^2 - 3 \geq 0;$
2. $2 - 2(2x-1) + 4x^2 - 3 > 0;$
3. $x(x-1) - 2(x-1)(x-2) - 4(x+1)^2 < 7x - 3(x+2)^2;$
4. $(x^2 - 5x + 6)(x^4 + 5x^2) \geq 0;$
5. $(x^2 + 5x)(2x - 3) \leq 0;$
6. $x^2 - 3 < (2x+1)^2 - 2;$
7. $x^2 - 4(x+4)(x-5) > 2(2x+1);$

Esercizio 7. Risolvete le seguenti disequazioni fratte:

1. $$\frac{x^2 - 5x + 8}{9 - x^2} < 0$$
2. $$\frac{x^4 + 4x^2}{1 - 27x^3} \leq 0$$
3. $$\frac{7x - 4}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2} < \frac{7}{x + 2}$$
4. $$\frac{x(x-1)(x^2-3)}{(x+1)(x-4)} \leq 0$$
5. $$\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Mario Battelli, Umberto Moretti, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio per le scuole supariori 1*, Le Monnier, 1990.

[2] Mario Battelli, Umberto Moretti, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio per le scuole supariori 2*, Le Monnier, 1990.

[3] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica UNO*, Etas Libri, 1994.

[4] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica DUE*, Etas Libri, 1995.

[5] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica TRE*, Etas Libri, 1995.