UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
"ROMA TRE"
FACOLTA' DI ARCHITETTURA

Precorso di Matematica

Anna Scaramuzza

Anno Accademico 2005 - 2006
17 - 24 Ottobre 2005

INDICE

1. GEOMETRIA EUCLIDEA

1.1 Triangoli

1.1.1 Criteri di congruenza tra due triangoli

Definizione 1.1.1. *Due figure si dicono congruenti se esiste un movimento rigido che permette di sovrapporli uno sull'altro senza deformarli.*

Criterio 1.1.1 (I Criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno due lati e l'angolo tra essi compreso congruenti allora i due triangoli si dicono congruenti.*

Criterio 1.1.2 (II Criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno due angoli e il lato ad essi adiacente congruenti allora i due triangoli si dicono congruenti.*

Esercizio 1.1.1. Dimostrare che in un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Esercizio 1.1.2. Dimostrare che un triangolo con due angoli congruenti e i lati opposti ad essi congruenti è isoscele.

Criterio 1.1.3 (III Criterio di congruenza)**.** *Se due triangoli hanno tutti i lati congruenti allora i due triangoli si dicono congruenti.*

1.1.2 Luoghi geometrici e punti notevoli di un triangoli

Definizione 1.1.2. *La semiretta uscente dal vertice di un angolo è detta* ***bisettrice*** *se divide l'angolo in due parti uguali.*

Definizione 1.1.3. *Il punto che divide in due parti uguali un segmento si dice* ***punto medio****.*

Definizione 1.1.4. *In un triangolo il segmanto che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto si dice* **mediana***.*

In un triangolo ci sono esattamente tre bisettrici e tre mediane, il punto di intersezione tra le tre bisettrici è detto **incentro** e quello di intersezione tra le tre mediane è detto **baricentro**.

Definizione 1.1.5. *Si chiama* ***distanza*** *fra un punto e una retta il segmento di perpendicolare condotto alla retta dal punto.*

Definizione 1.1.6. *In un triangolo il segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto si dice* ***altezza****.*

In un triangolo ci sono esattamente tre altezze, il punto di intersezione tra le tre bisettrici è detto **ortocentro**.

Esercizio 1.1.3. In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice (rispettivamente l'altezza, la mediana) è altezza e mediana relativamente alla base (rispettivamente bisettrice dell'angolo al vertice e mediana, bisettrice dell'angolo al vertice e altezza).

1.2 Circonferenza e cerchi

Definizione 1.2.1. *Definiamo come **circonferenza** il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso O, detto **centro**. Il segmento congiungente un punto della circonferenza con il centro è detto **raggio**.*

Definizione 1.2.2. *La regione piana delimitata da una circonferenza è detta **cerchio**.*

Se R è il raggio della circonferenza, allora la sua lunghezza è pari a $2\pi R$ e l'area del cerchio da essa delimitata è πR^2.
Enunciamo alcuni teoremi e proprietà che caratterizzano la circonferenza:

Teorema 1.2.1. *Due circonferenze e/o due cerchi che hanno lo stesso raggio sono uguali e viceversa.*

Teorema 1.2.2. *In una circonferenza l'asse di una qualsiasi corda (segmento congiungente due qualsiasi punti della circonferenza) passa per il centro. (Per asse di un segmento intendiamo il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento).*

Teorema 1.2.3. *La perpendicolare condotta dal centro ad una corda la dimezza.*

Teorema 1.2.4. *La congiungente il punto medio di una corda con il centro è ortogonale alla corda.*

Teorema 1.2.5. *Per 3 punti passa una ed una sola circonferenza.*

Dimostrazione. Fissiamo tra punti A, B, C nel piano. Consideriamo i segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}$. Siano r ed s gli assi dei segmenti $\overline{AB}, \overline{BC}$ rispettivamente. Tali rette si intersecano in un punto: $r \cap s = \{O\}$. Se consideriamo la circonferenza di centro O e raggio $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{OC}$ abbiamo la tesi. □

Definizione 1.2.3.

- *Considerimo in un piano una semiretta $\overline{OA}$. Mantenendo fisso il punto O spostiamo la semiratta senza farla uscire dal piano. Il movimento è detto rotazione e la parte di piano descritta dalla semiretta durante la rotazione si dice **angolo**.*
- *Un **angolo** è, quindi una parte di piano limitata da due semirette che hanno l'origine in comune. Le semirette sono dette **lati**.*

Definizione 1.2.4.

- *Un angolo si dice **convesso** se non contiene i prolungamenti dei suoi lati.*
- *Un angolo si dice **concavo** se contiene i prolungamenti dei suoi lati.*

Definizione 1.2.5. *Definiamo come **angolo al centro** di una circonferenza un qualsiasi angolo che ha per vertice il centro della circonferenza. Come **angolo alla circonferenza** definiamo invece un qualsiasi angolo il cui vertice appartiene alla circonferenza.*

Teorema 1.2.6. *Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente.*

Teorema 1.2.7. *In una circonferenza gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali.*

Teorema 1.2.8. *In una circonferenza ad ogni arco corrisponde un angolo al centro e viceversa.*

Quest'ultimo teorema permette di determinare la lunghezza di un arco e anche l'area di un settore circolare (regione piana compresa tra due raggi). La prima si determina grazie alla proporzione:

$$\alpha : 360^\circ = l : 2\pi R$$

mentre la seconda si trova utilizzando

$$\alpha : 360^\circ = \text{Area} : \pi R^2$$

1.3 Poligoni

Definizione 1.3.1. *Una **poligonale** è una curva che è unione di segmenti.*

Definizione 1.3.2. *Un **poligono** è una regione di piano delimitata da una poligonale chiusa (l'estremo iniziale coincide con quello finale) e non intrecciata (stella).*

Definizione 1.3.3. *Un poligono si dice **convesso** se nessuno dei prolungamenti dei suoi lati lo attraversa oppure se per ogni due punti del poligono il segmento che li congiunge è interno al poligono. Altrimenti il poligono si dice **concavo***

Poligoni con tre lati sono i triangoli, con quattro i quadrati, i rettangoli...
Analizziamo alcune proprietà dei poligoni:

Proposizione 1.3.1. *La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che in un triangolo l'angolo esterno è pari alla somma degli angoli esterni adiacenti e sulle proprietà degli angoli determinate tra due rette parallele e tagliate da una trasversale. □

Proposizione 1.3.2. *La somma degli angoli interni di un poligono convesso è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno un angolo giro.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto interno al poligono e suddividiamo il poligono in n triangoli. In ogni triangolino la somma degli angoli interni è un angolo piatto e quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{lato}(\text{ang. base } + \text{ang. vertice}) &= n\pi \\ \sum_{lato}(\text{ang. interni } + \text{ang. vertice}) &= n\pi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{lato}(\text{ang. interni }) &= n\pi - \sum_{lato}(\text{ang. vertice}) \\
&= n\pi - 2\pi
\end{aligned}
$$

□

Definizione 1.3.4. *Un poligono si dice* ***inscritto*** *in una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.*

Definizione 1.3.5. *Un poligono si dice* ***circoscritto*** *ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.*

Definizione 1.3.6. *Un poligono si dice* ***regolare*** *se ha tutti i lati e gli angoli uguali.*

Proposizione 1.3.3. *Un poligono regolare è circoscrivibile ad una circonferenza e inscrivibile in un'altra.*

Esercizio 1.3.1. Ricavare altezza e lato di un triangolo equilatero in funzione del raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta.

Esercizio 1.3.2. Ricavare il lato di un quadrato in funzione del raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta.

Definizione 1.3.7. *Il raggio della circonferenza circoscritta viene detto* ***raggio*** *del poligono.*

Definizione 1.3.8. *Il raggio della circonferenza inscritta viene detto* ***apotema*** *del poligono.*

Risolvendo gli esercizi ci si accorge che il raggio del poligono, l'apotema e il lato del poligono sono legati tra di loro. In particolare valgono

Regola 1.3.1. *In ogni poligono regolare la lunghezza dell'apotema si trova moltiplicando quella del lato per un numero fisso N.*

Regola 1.3.2. *In ogni poligono regolare la lunghezza del raggio si trova moltiplicando quella del lato per un numero fisso n.*

numero dei lati del poligono	N	n
3	$0,289$	$0,577$
4	$0,5$	$0,707$
5	$0,688$	$0,851$
6	$0,866$	1
7	$1,038$	$1,152$
8	$1,207$	$1,307$

Osservazione. È evidente che l'area del cerchio è maggiore di ciascun dei poligoni inscritti nella circonferenza che delimita il cerchio. Però si osserva che tanto più grande diventa il numero dei lati tanto più piccola è la differenza tra l'area del cerchio e quella del poligono. Inoltre, più aumenta il numero di lati più la circonferenza tende a confondersi con la poligonale che delimita il poligono. Questo ci suggerisce che per calcolare l'area del cerchio si può usare la formula

che determina l'area di un poligono in funzione del perimetro e del raggio.
L'area del cerchio si può quindi calcolare utilizzando questa formula mettendo al posto del perimetro la lunghezza della circonferenza e ottenere

$$A = \frac{2\pi R \cdot R}{2} \quad = \quad \pi R^2$$

$\diamondsuit$

1.4 Figure piane equivalenti

Definizione 1.4.1. *Due figure che hanno la stessa estensione si dicono equivalenti.*

Definizione 1.4.2. *Un quadrilatero avente i lati opposti a due a due paralleli si dice* **parallelogramma.**

Definizione 1.4.3. *Un* ***rettangolo*** *è un parallelogramma in cui gli angoli sono tutti retti.*

Definizione 1.4.4. *Un* ***quadrato*** *è un parallelogramma in cui i lati sono tutti uguali e gli angoli sono tutti retti.*

Teorema 1.4.1. *Due parallelogrammi che hanno rispettivamente congruenti le basi e le altezze sono equivalenti.*

Corollario 1.4.1. *Ogni parallelogramma è equivalente ad un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza.*

Teorema 1.4.2. *Un triangolo è equivalente ad un parallelogramma avente come base un segmento pari alla metà della base del triangolo e la stessa altezza.*

Teorema 1.4.3. *Due triangoli con la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.*

Definizione 1.4.5. *Un trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli.*

Teorema 1.4.4. *Un trapezio è equivalente ad un triangolo avente come base un segmento pari alla somma delle basi del trapezio e la stessa altezza.*

Teorema 1.4.5 (Teorema di Pitagora)**.** *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Teorema 1.4.6. *In un triangolo in cui il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti è rettangolo.*

Teorema 1.4.7 (I Teorema di Euclide)**.** *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito su uno dei due cateti è equivalente al rettangolo avente per base la proiezione del cateto sull'ipotenusa e per altezza l'ipotenusa.*

Teorema 1.4.8. *In un triangolo in cui il quadrato costruito su uno dei due cateti è equivalente al rettangolo avente per base la proiezione del cateto sull'ipotenusa e per altezza l'ipotenusa è rettangolo.*

Teorema 1.4.9 (II Teorema di Euclide)**.** *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per base e altezza le due proiezioni dei due cateti.*

Teorema 1.4.10. *In un triangolo in cui il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per base e altezza le due proiezioni dei due cateti è rettangolo.*

1.5 Aree delle principali figure piane

Figura	Area
Triangolo	$b \cdot h/2$
Rettangolo	$b \cdot h$
Quadrato	l^2
Parallelogramma	$b \cdot h$
Trapezio	$(B+b) \cdot h/2$
Cerchio	πR^2
Rombo	$D \cdot d/2$
Poligono regolare	$p \cdot a/2$ $l^2 \cdot N$
Poligono circoscritto	$p \cdot R/2$

dove b è la base della figura, h è l'altezza, l è il lato, R è il raggio, D, d sono le diagonali, p il perimetro, a l'apotema.

1.6 Figure simili

Definizione 1.6.1. *Consideriamo due figure nel piano. Se queste figure hanno gli stessi angoli e il rapporto tra segmenti opposti ad angoli uguali è costante allora diremo che la figure sono* ***simili****.*

1.6.1 Caso particolare: I triangoli

Definizione 1.6.2. *Due triangoli si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali.*

In generale si dimostra che:

Teorema 1.6.1. *Due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali hanno i lati corrispondenti proporzionali, cioé sono simili.*

Teorema 1.6.2. *Due triangoli aventi i lati corrispondenti proporzionali hanno gli angoli ordinatamente uguali, cioé sono simili.*

Proprietà 1.6.1. *In due triangoli simili il rapporto dei periometri è uguale al rapporto di due lati corrispondenti.*

Proprietà 1.6.2. *In due triangoli simili le basi sono proporzionali alle rispettive altezze.*

Proprietà 1.6.3. *Le aree di due triangoli simili sono proporzionali al quadrato del rapporto di due lati corrispondenti.*

1.7 Volumi e Superfici dei principali solidi

Solido	Superficie	Volume
Prisma	$A_{Tot} = 2(a \cdot b + a \cdot c + c \cdot b)$	$a \cdot b \cdot c$
Cilindro	$A_{Tot} = 2\pi R(h + R)$ $A_{Lat} = 2\pi Rh$	$\pi R^2 h$
Piramide	$A_{Tot} = A_{Lat} + A_{base}$	$A_{base} \cdot h/3$
Cono	$A_{Tot} = 2\pi R(a + R)$ $A_{Lat} = 2\pi Ra$	$\pi R^2 h/3$
Cubo	$A_{Tot} = 6l^2$ $A_{Lat} = 4l^2$	l^3
Sfera	$A_{Tot} = 4\pi R^2$	$4/3\pi R^3$
Calotta sferica	$A_{Tot} = 2\pi Rh$	$1/3\pi h^2(3R - h)$

dove a, b, c sono i lati del prisma, h è l'altezza del cilindro, l è il lato del cubo, R è il raggio dell'area di base del cilindro o del cono o il raggio della sfera (anche della sfera della calotta) , a è l'apotama di un cono.

BIBLIOGRAFIA

[1] Mario Battelli, Umberto Moretti, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio per le scuole supariori 1*, Le Monnier, 1990.

[2] Mario Battelli, Umberto Moretti, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio per le scuole supariori 2*, Le Monnier, 1990.

[3] Giovanni Bergnia, Alfonso Valentini, *N. E. Rette e piani*, Editrice La Scuola, 1974.

[4] Faggioli, Palatini, *Elementi di Geometria*, Ghisetti e Corvi Editori, 1988.

[5] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica UNO*, Etas Libri, 1994.

[6] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica DUE*, Etas Libri, 1995.

[7] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni *Nuovo Matematica TRE*, Etas Libri, 1995.