

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**  
**Facoltà di Architettura - Istituzioni di Matematiche I**  
Proff. C. Falcolini, V. Talamanca  
**Prova scritta del 21 Giugno 2010**

Nome..... Cognome.....

**Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti. Vanno consegnati SOLO questi fogli**

Si può recuperare un SOLO esonero, tempo 1 ora e mezza, per il 1° esonero svolgere gli esercizi I, II, VII; per il 2° esonero svolgere gli esercizi III, IV, VIII; per il 3° esonero svolgere gli esercizi V, VI, IX.

Per la prova scritta svolgere gli esercizi I, II, III, IV, V, VI; tempo 3 ore

**I. Limiti di successioni**

Data la successione  $a_n = 2 - \sqrt{\frac{n+3}{9n+1}}$

a) scrivere la definizione di limite per una generica successione convergente:

b) calcolare il limite di  $a_n$ :

c) dimostrare il risultato del punto b) utilizzando esplicitamente la definizione di limite:

## II. Induzione

Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale  $n \geq 2$  si ha

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1+n}{2n}$$

## III. Retta Tangente

a) Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $x_0$ . Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di  $f(x)$  in  $(x_0, f(x_0))$

b) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \log(x^2 - 3x + 1)$  nel punto  $(3, 0)$

c) Determinare per quali valori di  $k$  la retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = \log(x^2 - 3x + 1)$  nel punto  $(3, 0)$  risulta parallela alla retta  $y = (k^2 - 3k - 1)x + 1 - 2k$ .

#### IV. Studio di funzione

Data la funzione  $f(x) = (x - 1)e^{1+2x-x^2}$ . Determinare:

il dominio di definizione di  $f(x)$ :

il comportamento ai bordi del dominio di definizione ed eventuali asintoti orizzontali verticali ed obliqui:

l'insieme dove  $f(x)$  è crescente ed eventuali massimi e minimi relativi:

l'insieme dove la concavità è rivolta verso l'alto, gli eventuali flessi e disegnare (sul retro del foglio) il grafico di  $f(x)$ :

## V. Integrale indefinito

Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{4}{x(6 + \log(x))(1 + 5 \log(x))} dx$$

## VI. Area di una regione piana

Calcolare l'area della regione piana del primo quadrante compresa tra le curve di equazione:

$$y = 2 + \frac{6}{2x + 3} \quad , \quad y = \frac{12}{x + 3} \quad \text{e} \quad y = \frac{6}{x}.$$

## VII. Limiti di successioni

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{n+1}{n+3} \right)^{n+2} + \sqrt{4+n^2} - \sqrt{n^2+n+5} \right]$$

## VIII. Modello

Data la parabola di equazione  $y = -x^2 + x + 6$ , di vertice  $V$ ; fra tutti i triangoli aventi un vertice nell'origine e gli altri due in punti della curva aventi la stessa ordinata positiva determinare quello di area massima

## IX. Integrale definito

Calcolare il seguente integrale  $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{e^{2x}}{\sqrt{2+e^x}} dx$