

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Facoltà di Architettura - Istituzioni di Matematiche I
Proff. C. Falcolini, V. Talamanca
Prova scritta del 24 Giugno 2011

Nome..... Cognome.....

Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti. Vanno consegnati SOLO questi fogli

Si può recuperare un SOLO esonero, tempo 1 ora e mezza, per il 1° esonero svolgere gli esercizi I, II, VII; per il 2° esonero svolgere gli esercizi III, IV, VIII; per il 3° esonero svolgere gli esercizi V, VI, IX.

Per la prova scritta svolgere gli esercizi I, II, III, IV, V, VI; tempo 3 ore

I

Data la successione $a_n = \frac{n^2 + 3n}{3n^2 + 1}$

a) scrivere la definizione di limite per una generica successione convergente:

b) calcolare il limite di a_n :

c) dimostrare il risultato del punto b) utilizzando esplicitamente la definizione di limite:

II

Calcolare, se esiste, il limite di

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{2n^2 + 3n - 1}}{3n} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n+2}$$

III

Calcolare l'equazione della tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x-4|}$ nel punto di ascissa $x_0 = -4$.

IV. Studio di funzione

Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{3x^2 + 1}{(x - 1)^2}\right)$ determinare:

- il dominio di definizione di $f(x)$;
- gli eventuali asintoti;
- eventuali massimi e minimi relativi e dove $f(x)$ è crescente (e dove è decrescente);
- disegnare schematicamente il grafico di $f(x)$:

V. Integrale indefinito

Risolvere il seguente integrale

$$\int x \cos^3(x) dx$$

VI. Area di una regione piana

Calcolare l'area della regione piana compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = x \log(x)$ con $g(0) = 0$

VII.

- a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la seguente successione risulti monotona crescente: $a_n = \frac{n+k}{kn+1}$.
- b) Verificare che per $k = 2$ la successione é monotona decrescente.

VIII.

- a) Verificare che la funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 1 & x > -1 \\ x^2 + 5x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$; è continua ma non derivabile in $x = -1$.
- b) Determinare i punti c di $(-3, 2)$ tali che $f'(c) = 0$.
- c) Spiegare perché l'esistenza di tali c non contraddice il teorema di Rolle.

IX.

Un filo di metallo lungo 1 metro deve essere diviso in due parti. Con una parte si realizza un quadrato e con l'altra un triangolo equilatero. Determinare le dimensioni del quadrato e del triangolo affinché la somma dell'area del quadrato e di quella del triangolo risulti la minima possibile.