

Nome..... Cognome.....

Le risposte vanno accompagnate da spiegazioni esaurienti. Vanno consegnati SOLO questi fogli

Si può recuperare un SOLO esonero, tempo 1 ora e mezza, per il 1^o esonero svolgere gli esercizi I, II, VII; per il 2^o esonero svolgere gli esercizi III, IV, VIII; per il 3^o esonero svolgere gli esercizi V, VI, IX.

Per la prova scritta svolgere gli esercizi I, II, III, IV, V, VI; tempo 3 ore

I. Limiti di successioni

a) Scrivere la definizione di successione monotona decrescente

b) Verificare che la successione $a_n = \frac{n^2}{1-2n}$ è monotona decrescente

c) Dare la definizione di successione divergente a $-\infty$

d) Dimostrare usando la definizione di successione divergente a $-\infty$ che la successione $a_n = \frac{n^2}{1-2n}$ diverge a $-\infty$.

II Induzione

Dimostrare per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{2} \right) = -\frac{n^2}{4}$$

III. Retta Tangente

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2x \tan(x)$ nel punto $P = (\pi, 0)$

IV. Studio di funzione

Data la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 7x + 12}{2 - x}\right)$. Determinare
il dominio di definizione di $f(x)$:

il comportamento ai bordi del dominio di definizione ed eventuali asintoti orizzontali verticali ed obliqui

l'insieme dove $f(x)$ è crescente ed eventuali massimi e minimi relativi:

l'insieme dove la concavità è rivolta verso l'alto e disegnare (sul retro del foglio) il grafico di $f(x)$

VI. Integrale indefinito

Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)} dx$$

V. Area di una regione piana

Calcolare l'area della regione compresa tra le curve $y = x^2 - 6x + 7$ e $y = |x - 3|$.

VII. Limiti di successioni

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos(n\pi)}{n + 1} + (2^n + 7^n)^{\frac{1}{n}}$$

VIII Continuità

1) Dare la definizione di funzione continua in un punto x_0

2) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} & x \geq 1 \\ kx^2 - k^2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di k è continua in $x = 1$

IX. Modello

Ad un gioielliere viene commissionato un ciondolo. Il ciondolo è costituito da una struttura composta da un triangolo isoscele sormontato da emidischi (vedi figura). Gli emidischi costruite sui lati sono realizzate in oro mentre la base è realizzata in platino che ha un costo per unità di superficie triplo rispetto all'oro. Se il perimetro del triangolo è 7 cm, determinare la lunghezza dei lati affinché il costo sia minimo.