NIM

Regole

Si gioca in due giocatori. Si dispongono un certo numero di monete (m.) su tre file. Per esempio 3 m. sulla prima, 4 m. sulla seconda e 5 m. sulla terza, in breve indicata con il vettore $(3, 4, 5)$. I giocatori alternativamente tolgono una o più m. da una sola riga. Chi prende l'ultima m. vince.

Alcune considerazioni iniziali

È un gioco di strategia determinato, nel senso che se entrambe i giocatori agiscono al meglio il vincitore è determinato dalla posizione iniziale. È da notare che, come si vedrà, se la disposizione iniziale è determinata casualmente il primo giocatore ha più possibilità di vincere.

Rappresentazione in numeri binari

È utile rappresentare il gioco per mezzo dei numeri binari. Per esempio la posizione iniziale $(3, 4, 5)$ descritta sopra può essere rappresentata nella maniera seguente:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Posizioni "sicure" e "pericolose"

Definiremo "sicura" S una posizione tale che, dopo aver mosso ci garantisca la vittoria. Diversamente la posizione si dirà "pericolosa" P. Tutte le posizioni possibili vengono dunque distinte in due sole classi separate S e P. Due osservazioni risulteranno cruciali:

1. ogni P lasciata dall'avversario può essere mutata in S con una mossa opportuna (non necessariamente unica)

2. qualsiasi mossa si faccia S è mutata in P.

Per giocare razionalmente quindi un giocatore deve muovere in modo da trasformare ogni P lasciatagli dall'avversario in S. Tuttavia se il vostro avversario gioca razionalmente e vi lasia una S non c'è verso di batterlo!

Quali sono le P e quali le S

Scriviamo i numeri in notazione binaria. Sommiamo i numeri delle colonne. Se tutte le colonne hanno come somma numeri pari allora siamo in S; se invece almeno una colonna dà un numero dispari siamo in P.
Nell'esempio precedente si ottiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

quindi, siccome la seconda colonna dà un numero dispari siamo in P. Se invece ci fossimo trovati nella situazione seguente, $(1,4,5)$,

$$\begin{array}{ccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & & & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

allora saremmo stati in S.
Notiamo che chi vince, cioè leva l'ultima m., lascia la posizione $(0,0,0)$ che è infatti S.

La strategia vincente

Dimostreremo ora le due osservazioni enunciate in precedenza:

1. ogni P lasciata dall'avversario può essere mutata in S con una mossa opportuna (non necessariamente unica)

2. qualsiasi mossa si faccia S è mutata in P.

Dimostrazione di 1. Si consideri l'ultima colonna (partendo da destra) che dà come somma un numero dispari. Esisterà necessariamente una riga che ha nel posto corrispondente alla colonna di cui sopra un 1 (se infatti tutte le righe avessero 0 in quel posto la somma darebbe 0 che è pari). Si sottraggano tante m. da quella riga necessarie a cambiare la parità dei posti (e solo di quelli!) sulle colonne che danno somma dispari; il gioco è fatto. Un paio di esempi risulteranno chiarificatori. Si consideri ancora il caso $(3, 4, 5)$ che è P. L'ultima (e anche l'unica) colonna che dà somma dispari è la seconda (viene 1). C'è un'unica riga, la prima, che abbia su quella colonna un 1; dobbiamo quindi sottrarre un certo numero di m. da questa riga. Essendo lo schema

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

basta cambiare la parità di 1 $(= 1 * 2^1 = 2)$ nella seconda colonna (da destra) facendolo diventare 0 cioè basta togliere 2 m. dalla prima riga e la situa zione $(3, 4, 5)$ che è P diventa $(1, 4, 5)$ che è S:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & & & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

Consideriamo ora il caso $(3, 4, 8)$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & & 1 & 0 & 0 \\ 8 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

che è P (tutte le colonne danno somma dispari!). L'ultima colonna (da destra) che dà somma dispari è quindi la quarta corrispondente a 2^3. La riga (l'unica) che ha un 1 al quarto posto è la terza 1000 $(= 1 * 2^3 = 8)$, perciò dovrò togliere m. proprio da questa riga. In particolare basta toglierne una sola trasformando $(3, 4, 8)$ in $(3, 4, 7)$ che è S

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 7 & \rightarrow & 1 & 1 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Osserviamo solo che la mossa risolutiva non è necessariamente una sola. Infatti la situazione $(7, 6, 4)$ che è P può essere resa S in tre modi diversi: facendola diventare $(2, 6, 4)$, $(7, 1, 4)$ o $(7, 6, 1)$, togliendo rispettivamente 5 m. dalla prima riga, 5 m. dalla seconda o 3 m. dalla terza.

Dimostrazione di 2. È molto semplice: levando un qualsiasi numero di m. da una riga significa cambiare almeno un posto sostituendo $1 \rightarrow 0$ o $0 \rightarrow 1$. Questo significa cambiare la parità della colonna corrispondente che da pari (siamo nel caso S) diventa necessariamente dispari.

Fine della fiera

Dalle osservazioni 1. e 2. mostrate sopra segue necessariamente che, essendo la posizione finale che lascia il giocatore che vince (togliendo l'ultima m.) esattamente $(0, 0, 0)$ che è S, la strategia giusta è lasciare sempre (se possibile!) una situazione S dopo la propria mossa, in modo tale che l'avversario sarà costretto (vedi osservazione 2.) a trasformarla in P (per lui pericolosa!) e al turno successivo (tramite l'osservazione 1.) noi la si possa ritrasformare in S e così via sino alla vittoria finale! Purtroppo però non sempre questo è possibile! Se infatti l'avversario ci lascia una S per quanto ci si affanni (vedi osservazione 2.) saremmo costretti a lasciargli una P e, se lui gioca bene, perderemmo di sicuro. È quindi chiaro che se i due giocatori si comportano razionalmente la vittoria è determinata dalla posizione iniziale: se questa è una S il primo a muovere è sicuro di perdere se l'avversario gioca bene, se invece è una P il primo giocatore vince sicuramente. Essendo la posizione P più probabile della S se le m. vengono disposte casualmente all'inizio (si può vedere che la probabilitá di avere una P tende a 1 con l'aumentare del numero di m. mentre quella di S tende a 0!) il primo giocatore è avvantaggiato.