

Qualche nota sul laboratorio “Astromatematica” *

R. Ferretti

June 29, 2006

1 Quadro generale

Per dare un’idea dei mezzi matematici con cui si interpretano e si predicono i fenomeni di meccanica celeste, ci muoveremo:

- Individuando un fenomeno di qualche interesse, che si presti ad essere analizzato e predetto, quale quello delle eclissi;
- Dando una idea qualitativa di quale sia il punto cruciale del fenomeno (nel nostro caso, il passaggio di due pianeti in punti allineati “nello stesso istante”);
- Individuando un modello simile ma matematicamente piú abbordabile (nel nostro caso, il doppio pendolo), su cui illustrare le metodologie generali;
- Analizzando il modello semplificato sia sotto l’aspetto qualitativo che sotto quello numerico, e confrontando le conclusioni dei due approcci;
- Tornando al modello piú generale per dare un’idea di come quelle stesse metodologie si applichino nei casi complessi.

I prerequisiti richiesti per questo studio si conviene siano ridotti al minimo, in particolare non possiamo supporre la padronanza della nozione di derivata (anche se da un qualche retroterra di fisica daremo per buono che gli studenti siano in grado di averne comunque un’idea intuitiva in forma di *velocitá di variazione*). Alcuni prerequisiti irrinunciabili dovrebbero essere però le nozioni base di trigonometria, quelle di meccanica elementare ed una certa padronanza con la rappresentazione cartesiana (e forse anche parametrica?) di curve.

1.1 Derivazione dell’equazione del pendolo

Ripercorriamo per sommi capi la derivazione della equazione del pendolo. L’idea dovrebbe essere che in questo caso il modello é sufficientemente semplice da essere risolto a mano, mentre nel caso di situazioni piú complesse resta comunque la strada della discretizzazione anche laddove (il modello matematico esiste, ma) la soluzione esplicita non é piú possibile.

La meccanica del problema é illustrata nella fig. 1.

*Materiale prodotto nell’ambito del Progetto “Lauree Scientifiche”

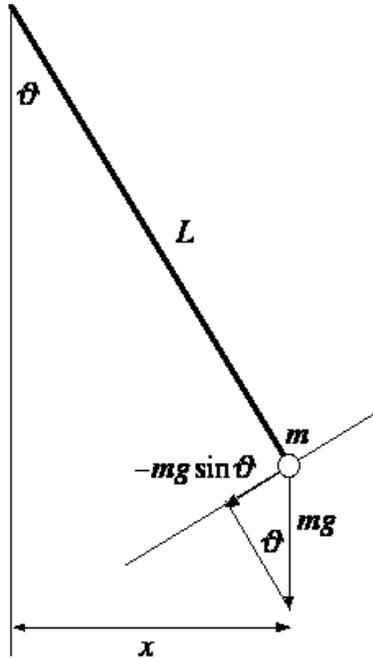


Figura 1. Situazione fisica del pendolo.

Nella derivazione del modello lineare la ipotesi cruciale é quella di *piccole oscillazioni*: si suppone cioè che θ sia sufficientemente piccolo da poter scrivere

$$x = L \sin \theta \approx L\theta. \quad (1.1)$$

La forza peso ha sulla traiettoria del pendolo una proiezione di modulo $mg \sin \theta \approx mg\theta$ e di segno negativo (ad esempio, prendendo come positivi gli spostamenti verso destra, la proiezione della forza peso é diretta verso sinistra). Applicando lungo l'asse x il secondo Principio della Dinamica

$$\ddot{x} = a = \frac{F}{m}, \quad (1.2)$$

ed usando (1.1), si ottiene finalmente

$$\ddot{x} = -\frac{mg\theta}{m} = -\frac{g}{L}x. \quad (1.3)$$

2 Studio qualitativo

In questa parte della analisi ci poniamo in un quadro piú adatto ad analizzare e predire lo specifico fenomeno. Ovvero, rinunciando a dare una descrizione piú dettagliata possibile del moto dei due pendoli, ci concentriamo sulla caratteristica di interesse che é la doppia periodicitá.

A questo stadio e con questi prerequisiti, *dobbiamo dare per buono che i due pendoli abbiano soluzioni sinusoidali* del tipo

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $\omega_1 = \sqrt{g/L_1}$, $\omega_2 = \sqrt{g/L_2}$, e le ampiezze A_i e gli sfasamenti ϕ_i dipendono dalle condizioni iniziali. Per semplicitá espositiva, anche se non é particolarmente necessario, possiamo scegliere di porre $A_1 = A_2 = 1$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Al tempo zero i due pendoli sono in coincidenza (quindi siamo in una “eclisse”) nell'origine.

Una differenza di questo modello semplificato rispetto al modello completo bi- o tridimensionale é che nel caso unidimensionale il pendolo passa per un punto (che non sia un estremo) *due volte* per ogni periodo, al contrario di quanto accade lungo l’orbita di un pianeta. Quindi dovrebbe essere chiaro che possiamo avere in un certo senso “piú soluzioni” che nel modello completo (in altri termini, le metodologie utilizzate nell’analisi del modello completo potrebbero non trovare tutte le soluzioni).

2.1 Prima metodologia: il toro

La condizione di “eclisse” o di coincidenza nell’origine dei due pendoli é data da

$$\sin(\omega_1 t) = \sin(\omega_2 t) = 0. \quad (2.2)$$

Poniamo ora $\alpha_1 = \omega_1 t \pmod{2\pi}$, $\alpha_2 = \omega_2 t \pmod{2\pi}$ ed osserviamo l’evoluzione del sistema nel piano $\alpha_1 - \alpha_2$ (questo equivale ad eliminare, almeno momentaneamente, la variabile tempo). Su questo piano i punti descritti dal sistema sono all’interno del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, e poiché la posizione é definita a meno di multipli di 2π , i lati $\alpha_1 = 0$ ed $\alpha_1 = 2\pi$ vanno identificati, cosí come vanno identificati gli altri due lati $\alpha_2 = 0$ ed $\alpha_2 = 2\pi$. L’oggetto che si ottiene in questo modo puó essere visto come un quadrato con condizioni biperiodiche sui lati, o come un toro se si immagina di “richiudere” le due coppie di lati del quadrato per formare una superficie chiusa.

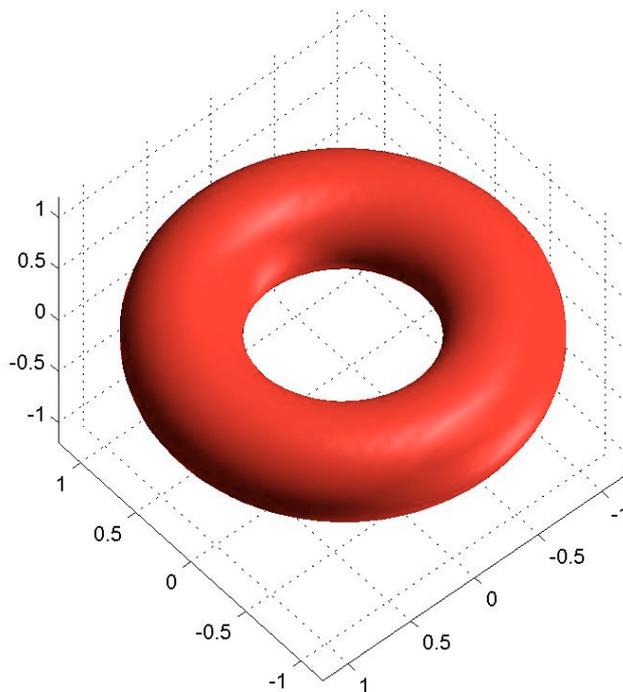


Figura 2. Toro.

Poiché, a meno di multipli di 2π , si ha

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \alpha_1, \quad (2.3)$$

allora l'evoluzione del sistema può essere rappresentata nel quadrato biperiodico tracciando una retta con pendenza ω_2/ω_1 e, quando questa retta esce dal quadrato, facendola "rientrare" (con la stessa pendenza) dal punto che si identifica con quello di uscita, come mostrato in fig. 2.

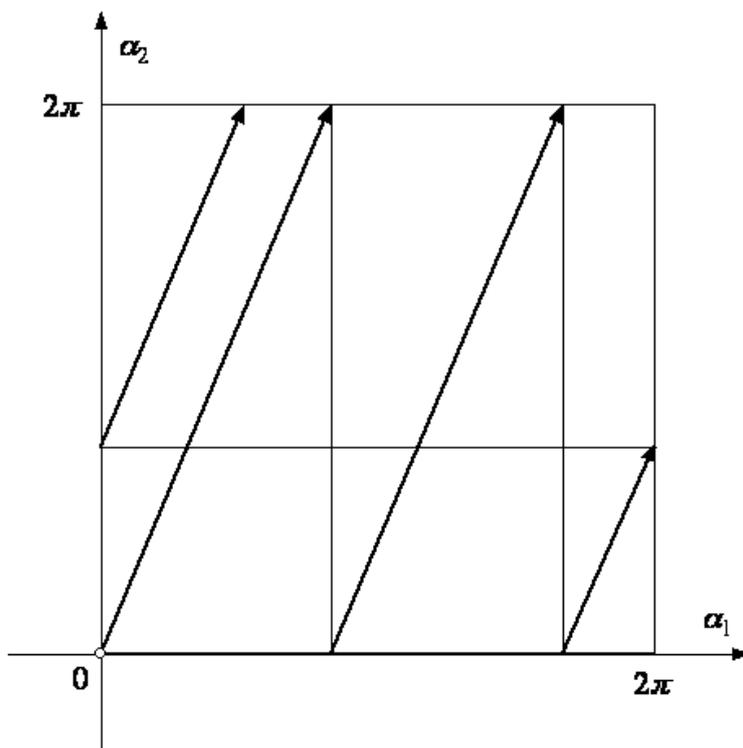


Figura 2. Traiettorie nel quadrato biperiodico.

Il punto del quadrato (o del toro, se si preferisce) che corrisponde alla eclisse è il punto $(0, 0)$: infatti tornando in questo punto i due pendoli sono di nuovo allineati nell'origine e in tempi successivi non faranno che ripercorrere la traiettoria già percorsa. In realtà ci sono, come già notato, altri punti in cui i due pendoli sono allineati (anche se questo tipo di soluzioni in effetti non si ritrovano nel caso dei pianeti). Più precisamente, i due pendoli sono allineati nell'origine sotto la condizione

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0, \quad (2.4)$$

che è soddisfatta dalla coppia $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, ma anche dai punti

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi; \quad (2.5)$$

$$\alpha_1 = \pi, \quad \alpha_2 = 0; \quad (2.6)$$

$$\alpha_1 = \pi, \quad \alpha_2 = \pi. \quad (2.7)$$

Non è detto però che la curva così tracciata ritorni necessariamente nel punto $(0, 0)$: questo accade solo se il rapporto ω_2/ω_1 è razionale. Se

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (2.8)$$

con N_1, N_2 primi tra loro, allora la condizione di allineamento $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (corrispondente al nuovo passaggio per l'origine del quadrato) si avrà dopo N_1 periodi del pendolo 1, o, equivalentemente, dopo N_2 periodi del pendolo 2.

Osservazioni:

- Se il rapporto ω_2/ω_1 é irrazionale, non esiste un numero finito di periodi che riporti i due pendoli in allineamento, però approssimando sempre meglio il rapporto irrazionale con rapporti razionali si vede che si può andare vicino a piacere a questa condizione (a patto di aspettare abbastanza...);
- Tanto piú grandi sono i numeri N_1 ed N_2 , tanto piú bisogna aspettare per avere una nuova eclisse (e tanto piú la retta si addensa nel quadrato);
- Nella pratica non serve la coincidenza esatta dei due punti: basta che coincidano a meno di un “piccolo” scarto (questa é un’occasione per rifare l’aggancio con il modello fisico).

2.2 Seconda metodologia: le curve di Lissajous

Un altro approccio di analisi qualitativa, che però non può essere implementato a mano neanche nei casi semplici, é quello di analizzare il sistema nel piano $x_1 - x_2$, cioè graficando la posizione di un pendolo contro la posizione dell’altro. Si osserva quindi una curva di espressione parametrica

$$\begin{cases} X(t) = x_1(t) = \sin(\omega_1 t) \\ Y(t) = x_2(t) = \sin(\omega_2 t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Le curve che si ottengono vanno sotto il nome di *curve di Lissajous* e nel nostro caso vivono nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ del piano $x_1 - x_2$ (anche qui si é scelto evidentemente di eliminare la variabile tempo usandola come parametro nella espressione (2.9)). In questo metodo di analisi qualsiasi passaggio per l’origine indica una eclisse, ma la soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ é quella che richiude la curva in modo che sia regolare. Anche in questo caso ovviamente se il rapporto ω_2/ω_1 é irrazionale la curva non si chiude, e piú gli interi N_1 ed N_2 sono grandi, piú “fitta” é la curva nel quadrato (vedi fig. 3).

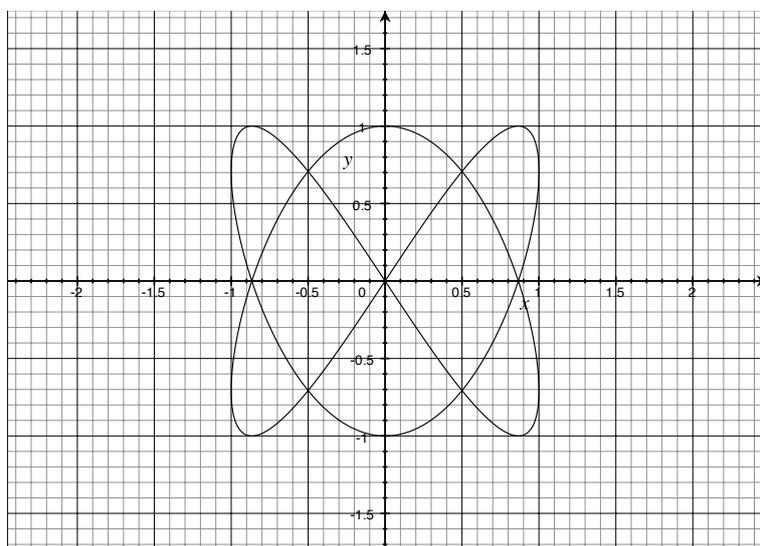


Figura 3a. Curva di Lissajous per $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$.

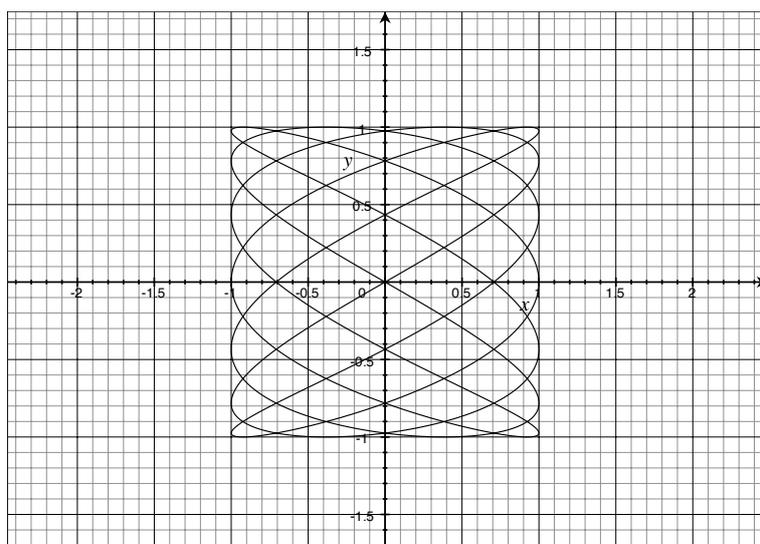


Figura 3b. Curva di Lissajous per $\omega_1 = 7$, $\omega_2 = 4$.

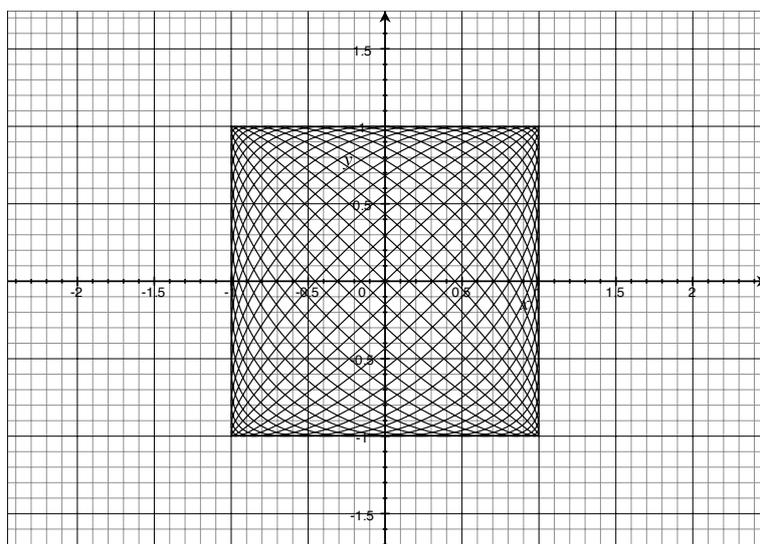


Figura 3c. Curva di Lissajous per $\omega_1 = 21$, $\omega_2 = 20$.

3 Discretizzazione

Lo scopo di introdurre una versione discretizzata delle Equazioni Differenziali Ordinarie, ed in particolare del secondo Principio della Dinamica, é da un lato di evitare il prerequisito analitico di definire l'operatore derivata, e dall'altro di mettere lo studente in grado di riprodurre approssimativamente la soluzione con un procedimento piú "leggibile", ed implementabile anche quando non sia nota la soluzione esatta del problema. Aggiungerei che considero provvisorie le notazioni usate nel seguito, non per eccessivo amore di formalismo, ma perché mi sembra importante distinguere da subito le grandezze istantanee da quelle medie ed ancora da quelle approssimate (in questa versione preliminare, però, identificheró opportunisticamente questi concetti, almeno in modo approssimato, ogni volta che mi farà comodo).

3.1 Questioni preliminari

Trattandosi di un'equazione del secondo ordine é indispensabile, vuoi già nel continuo, vuoi direttamente nel discreto, riscrivere la equazione in modo da far comparire solo derivate o incrementi primi. Visto che si é scelto di non utilizzare direttamente il concetto di derivata, opteró qui per la seconda soluzione, utilizzando come base un incremento fissato di tempo Δt . Le grandezze che intervengono sono quindi la posizione x , la velocità media

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

e l'accelerazione media

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.2)$$

(va ovviamente fatta presente la differenza tra la *definizione* (3.2) di accelerazione media in senso cinematico ed il secondo Principio della Dinamica (1.2) che é una *legge fisica*).

Ci si muove seguendo due principi:

- Si parte convenzionalmente da $t_0 = 0$. Le grandezze fisiche x , $v = \dot{x}$, $a = \ddot{x}$ vengono calcolate (o meglio, approssimate) *solo a tempi discreti* $t_k = k\Delta t$, come mostrato in fig. 4.

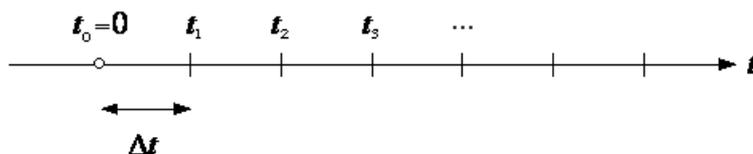


Figura 4. Asse dei tempi discretizzato.

- Si dá per buono che le grandezze fisiche varino “lentamente” rispetto a Δt , in modo da sostituire alle grandezze istantanee le rispettive grandezze medie (3.1) e (3.2). Quindi si calcoleranno velocità ed accelerazione come

$$v_k = v(t_k) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t}, \quad (3.3)$$

$$a_k = a(t_k) \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Conoscendo le posizioni x_k é quindi possibile calcolare velocità ed accelerazioni approssimate applicando prima (3.3) e poi (3.4). Nel nostro caso si conoscono le forze, quindi si fará la strada inversa: prima dalla applicazione del secondo Principio della Dinamica si calcolano le accelerazioni, poi da (3.4) le velocità, e quindi da (3.3) le posizioni, sempre in corrispondenza degli istanti t_k .

3.2 Costruzione generale dello schema discreto

Anche se non verrà usata per derivare lo schema, é bene aver presente la versione continua del problema, ovvero la (1.2) messa in forma di sistema del primo ordine, con le giuste condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = F/m \\ x(t_0) = x_0 \\ v(t_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Per i nostri scopi, riscriviamo le (3.3), (3.4) nella forma

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t v_k, \quad (3.6)$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t a_k, \quad (3.7)$$

dopodiché ricordando il secondo Principio della Dinamica sostituiamo ad a_k il secondo membro di (1.2) calcolato in t_k :

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t v_k. \quad (3.8)$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \frac{F_k}{m}, \quad (3.9)$$

L'ultimo passo é di calcolare queste quantità in avanti a partire dai dati x_0, v_0 :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t v_k & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ v_{k+1} = v_k + \Delta t \frac{F_k}{m} & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ x_0, v_0 & \text{dati.} \end{cases} \quad (3.10)$$

La (3.10) é in effetti abbastanza intuitiva: sto dicendo che posizione e velocità all'istante $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ sono (circa!) uguali alle grandezze in t_k incrementate rispettivamente di Δt volte la velocità in t_k e di Δt volte la accelerazione in t_k . A sua volta la accelerazione é scritta in funzione delle forze che però (anche nella loro dipendenza da x e/o da v) sono date per note.

Tramite (3.10) é possibile, partendo dai dati iniziali x_0 e v_0 e dalle forze F_k , calcolare un passo per volta della soluzione discreta in modo esplicito (non per niente questo metodo, introdotto da Eulero, va sotto il nome di *metodo di Eulero esplicito*). Quando $\Delta t \rightarrow 0$, la soluzione approssimata costruita in questo modo converge alla soluzione esatta (questo é un teorema tutt'altro che banale, ma per tentativi si può comunque osservare che c'è una qualche convergenza delle soluzioni discrete ad una soluzione limite).

3.3 Il caso del pendolo

Per applicare (3.10) all'equazione del pendolo non é decisivo scegliere se riferirsi al modello lineare (piccole oscillazioni) o a quello completo. Potrebbe essere interessante, anche se forse poco in tema con il laboratorio, verificare che per piccole oscillazioni il modello completo fornisce risultati paragonabili con quello lineare. Comunque, riferendosi al modello lineare

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.11)$$

ed applicando il metodo descritto nel paragrafo precedente, si ottiene

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta t v_k \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 \Delta t x_k. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nel piano $x - v$, le traiettorie di questo sistema sono ellissi centrate nell'origine, ed in particolare se $\omega = 1$ sono circonferenze. Mediante semplici considerazioni geometriche si vede che il metodo di Eulero sposta il punto (x_k, v_k) lungo la tangente alla vera traiettoria del sistema (vedi fig. 5) e quindi, laddove il pendolo lineare effettuerebbe delle traiettorie circolari intorno all'origine, la sua approssimazione di Eulero effettua delle spirali che amplificano le oscillazioni. Si potrebbe anche pensare di costruire delle curve di Lissajous approssimate a partire dalle approssimazioni dei moti dei due pendoli (e confrontarle con quelle esatte).

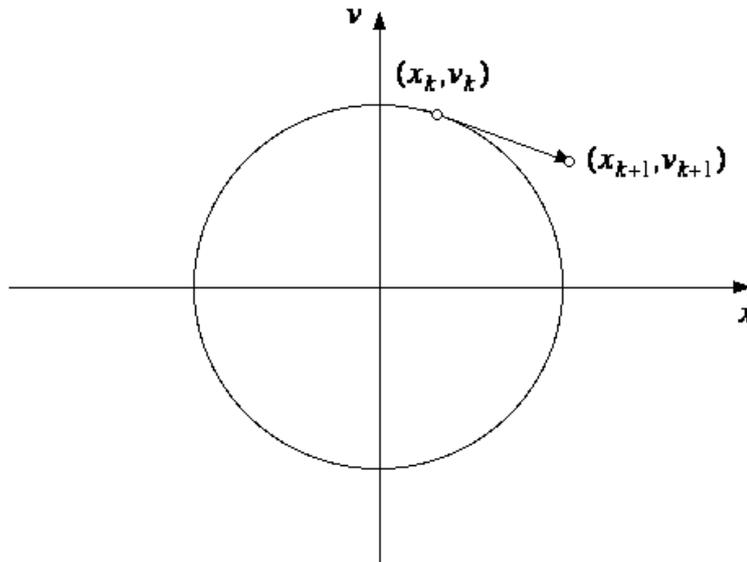


Figura 5. Comportamento qualitativo del metodo di Eulero.

Si possono trarre in proposito alcune indicazioni:

- Le operazioni che hanno portato a definire il metodo di Eulero (3.12) comportano delle *approssimazioni* che fanno sí che la traiettoria discreta non coincida quantitativamente, ed in certi casi neanche qualitativamente, con la soluzione esatta (quando mai quest'ultima si possa trovare esplicitamente);
- Prendendo però passi Δt sempre piú piccoli (ma mantenendo la lunghezza dell'intervallo dei tempi in cui si calcola la soluzione) si vede che le traiettorie discrete si avvicinano a quella limite, e che questa soluzione é proprio nella forma sinusoidale di (2.1). Si può dimostrare che lo scarto tra soluzione ed approssimazione di Eulero é dell'ordine di Δt per $\Delta t \rightarrow 0$.

4 Complicare il modello (?)

Tra l'equazione del pendolo ed i problemi a molti corpi che caratterizzano il moto dei corpi celesti ci sono molte vie di mezzo, alcune forse percorribili con questa strategia di discretizzazione. Una possibilità potrebbe essere descrivere il moto di un corpo "piccolo" nel campo gravitazionale generato da un corpo "grande", intendendo con questo che si rinuncia a descrivere l'interazione del primo sul secondo. In questo caso, la derivazione del modello mi sembra già un po' piú complicata: bisogna proiettare la forza gravitazionale su ognuno degli assi. Se il moto é planare, però, ce se la può cavare con un sistema di quattro equazioni differenziali (quattro equazioni alle differenze nel discreto): posizione e velocità per ognuno dei due assi.