4/3/06
Luigi Chierchia

Moto uniforme sul toro bidimensionale

1. Il toro bidimensionale

Denotiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi (con segno) $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$; se $x < y$ sono numeri reali denotiamo

$$[x, y] := \{t \in \mathbb{R} \ : \ x \leq t \leq y\} \ , \qquad (x, y) := \{t \in \mathbb{R} \ : \ x < t < y\} \ ,$$
$$[x, y) := \{t \in \mathbb{R} \ : \ x \leq t < y\} \ , \qquad (x, y] := \{t \in \mathbb{R} \ : \ x < t \leq y\} \ .$$

Dato un numero[1] x denotiamo con $[x]$ la sua *parte intera* ossia il più grande intero minore o uguale ad x: in formule

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } n \leq x\} \ .$$

Ad esempio, $[3,543] = 3$, $[100] = 100$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-2] = -2$, $[-2,31] = -3$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Si osservi che per ogni numero x si ha

$$x - [x] \in [0, 1)$$

e viceversa, dato un numero x esiste un unico numero $x' \in [0, 1)$ ed un unico intero n tali che $x = x' + n$ ed infatti tali numeri sono $x' = x - [x]$ e $n = [x]$. Inoltre, si noti che

$$[x + n] = n \ , \qquad \forall \ x \in [0, 1) \ \text{ e } \ \forall \ n \in \mathbb{Z} \ . \tag{1}$$

Denotiamo con $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le coppie ordinate di numeri reali (x, y). Data una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ denotiamo con $(\tilde{x}, \tilde{y})$ l'insieme di tutte le coppie di numeri della forma $(x + n, y + m)$ al variare di n e m in $\mathbb{Z}$ ossia l'insieme di tutte le traslazioni intere della coppia (x, y): elementi di $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sono

$$(x, y) \quad (x + 3, y - 2) \ , \quad (x - 101, y) \ , (x + 72, y + 10^{10}) \ , ...$$

Definiamo il *toro bidimensionale* $\mathbb{T}^2$ come

$$\mathbb{T}^2 = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \ .$$

[1] Useremo la convenzione che "numero" significa "numero reale" e "intero" significa "numero intero"; naturalmente $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ e quindi un intero è un numero.

Dato un numero x definiamo

$$p(x) := x - [x] \ ;$$

per quanto detto sopra $p(x)$ è l'unico numero in $[0, 1)$ che differisce da x per un intero n. Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definiamo

$$P(x, y) := \big(p(x), p(y)\big) \ .$$

Consideriamo un elemento $(X, Y) \in \mathbb{T}^2$; se (x', y') e (x'', y'') sono due qualunque coppie di numeri appartenenti a (X, Y) si ha che

$$P(x', y') = P(x'', y'') \ .$$

Questo significa che possiamo *identificare* elementi di $\mathbb{T}^2$ con coppie di numeri reali tra 0 (incluso) e 1 (escluso); denotiamo tali coppie con

$$Q := [0, 1) \times [0, 1) \ .$$

2. Moti uniformi su $\mathbb{T}^2$

Il moto uniforme sul toro con "punto di partenza" $(X, Y) \in \mathbb{T}^2$ e "velocità" $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, con α e β non entrambi nulli, è, per definizione, l'applicazione

$$t \in \mathbb{R} \to P(x + \alpha t, y + \beta t) \in Q \ , \tag{$*$}$$

dove (x, y) è il rappresentante in Q di[2] (X, Y). Un moto uniforme $(*)$ su $\mathbb{T}^2$ si dice *periodico* se esiste $T > 0$ tale che

$$P(x + \alpha T, y + \beta T) = (x, y) \ ; \tag{2}$$

il *periodo* di tale moto è il più piccolo $T > 0$ per cui vale la (2).

I due seguenti teoremi descrivono completamente il comportamento dei moti lineari sul toro.

Teorema 1 *Un moto uniforme $(*)$ su $\mathbb{T}^2$ è periodico se e solo se esistono $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ non entrambi nulli tali che*

$$\alpha n + \beta m = 0 \ . \tag{3}$$

[2]Ossia, preso un qualunque $(x', y') \in (X, Y)$, $(x, y) = P(x', y')$.

La relazione (3) significa o che uno tra α e β è nullo oppure (se sono entrambi non nulli) che il numero reale α/β è *irrazionale* (equivalentemente β/α è irrazionale).

Teorema 2 *Un moto uniforme* $(*)$ *su* $\mathbb{T}^2$ *non periodico passa arbitrariamente vicino ad ogni punto di* $\mathbb{T}^2$.

L'enunciato del Teorema 2 significa che presi comunque due punti (x, y) ("punto di partenza") e (x', y') in Q e fissato un numeretto $\varepsilon > 0$ (che misura una "prefissata precisione" arbitrariamente piccola), esiste $T > 0$ tale che

$$|p(x + \alpha T) - x'| < \varepsilon \ , \qquad |p(y + \beta t) - y'| < \varepsilon \ . \tag{4}$$

3. Dimostrazione del Teorema 1

La relazione (2) è equivalente a

$$x + \alpha T - q = x \ , \qquad y + \beta T - r = y$$

con $q = [x + \alpha T]$ e $r = [y + \beta T]$, ossia

$$\alpha T = q = [x + \alpha T] \qquad \text{e} \qquad \beta T = r = [y + \beta T] \ . \tag{5}$$

Moltiplicando la prima relazione per β, la seconda per α e sottraendo si ottiene la (3) con $n = r$ e $m = -q$; si noti che r e q (e quindi n e m) non possono essere entrambi nulli perché altrimenti da (5) (e dal fatto che $T > 0$) seguirebbe che α e β sono entrambi nulli contrariamente alla definizione di moto periodico.

Assumiamo ora la (3) e assumiamo dapprima che uno tra α e β, ad esempio α, sia nullo (la (3) vale, quindi, con $n = 1$ e $m = 0$). Allora la (5) vale con $T = \sigma/\beta$ dove σ è il segno di β (ossia $\sigma = 1$ se $\beta > 0$ e $\sigma = -1$ se $\beta < 0$): infatti (si ricordi la (1)) $\alpha T = 0 = [x]$ e $\beta T = \sigma = [y + \sigma]$.

Assumiano, infine, che $\alpha\beta \neq 0$ e che valga (3) (e quindi anche $nm \neq 0$). Dividendo ambo i membri di (3) per $\alpha\beta$ si ha

$$\frac{n}{\beta} + \frac{m}{\alpha} = 0 \ . \tag{6}$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere che $n/\beta > 0$ (altrimenti si moltiplichi la (6) per -1) e poniamo allora $T := n/\beta$. Da (1) e (6) segue allora che

$$\beta T = n = [y + n] = [y + \beta T] \ , \qquad \text{e} \qquad \alpha T = \alpha \frac{n}{\beta} = -m = [y - m] = [y + \alpha T] \ ,$$

che è la (5). **CVD**

4. Approssimazioni razionali di irrazionali: un teorema di Lioville

Teorema *Sia γ un numero irrazionale. Per ogni intero $N \geq 1$ esistono due interi k e h tali che*

$$|\gamma k - h| < \frac{1}{N} \qquad \text{con} \;\; 1 \leq k \leq N \; . \tag{7}$$

Dimostrazione Sia $I_N := \{\gamma k - [\gamma k] : \; 0 \leq k \leq N, \; (k \text{ intero})\}$. Tale insieme è un sottoinsieme di $[0,1)$ (per definizione di parte intera) e contiene $N+1$ punti distinti: se ci fossero due punti uguali $\gamma k_1 - [\gamma k_1] = \gamma k_2 - [\gamma k_2]$ con $0 \leq k_1 < k_2 \leq N$ si avrebbe

$$\gamma = \frac{[\gamma k_2] - [\gamma k_1]}{k_2 - k_1}$$

contraddicendo l'irrazionalità di γ. Dividiamo l'intervallo $[0,1)$ negli N intervalli disgiunti $[0,1/N)$, $[1/N,2/N)$,...,$[(N-1)/N,1)$. Poiché I_N contiene $(N+1)$ punti distinti, esiste un intervallo $J = [(j-1)/N, j/N)$ che contiene almeno due punti di I_N: siano $x_1 = \gamma k_1 - [\gamma k_1]$ e $x_2 = \gamma k_2 - [\gamma k_2]$, con $0 \leq k_1 < k_2 \leq N$, tali punti. Allora, $|x_2 - x_1| < 1/N$, che equivale a (7) con $0 < k := k_2 - k_1 \leq N$ e $h := [\gamma k_2] - [\gamma k_1]$. **CVD**

Si noti che da (7) segue che

$$\left|\gamma - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{N\,|k|} \leq \frac{1}{k^2} \; .$$

5. Dimostrazione del Teorema 2

Dividiamo la dimostrazione in alcuni passi.

1. Senza perdita di generalità, *possiamo assumere che* $0 < y' < 1$. Infatti, supponiamo la validità di (4) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $0 < y' < 1$ e supponiamo di dover dimostrare (4) con $y' = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, applichiamo il teorema con $\varepsilon/2$ e punto di arrivo $(x', \varepsilon/2)$ cosicché si avrà

$$\Big|p(x + \alpha T) - x'\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \; , \qquad \Big|p(y + \beta t) - \frac{\varepsilon}{2}\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \; . \tag{8}$$

Ma allora

$$\Big|p(y + \beta t)\Big| = \Big|p(y + \beta t) - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\Big| \leq \Big|p(y + \beta t) - \frac{\varepsilon}{2}\Big| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{9}$$

che assieme alla prima diseguaglianza in (8) mostra la validità della (4) anche nel caso $y' = 0$.

2. Definiamo una successione di tempi $0 < T_k \uparrow \infty$:

$$T_k = \frac{k}{|\alpha|} + \frac{x' - x}{\alpha} \ , \qquad\qquad k = 1, 2, 3, ... \tag{10}$$

Sia $\sigma = \alpha/|\alpha|$. Da (10) e da (1) (con $x = x'$ e $n = \sigma k$) si ha che

$$p(x + \alpha T_k) - x' = x + \alpha T_k - [x + \alpha T_k] - x' = \sigma k - [\sigma k + x'] = 0 \ .$$

Dunque, con la scelta (10), la prima relazione in (4) è sempre soddisfatta. Rimane da verificare che, comunque si scelga $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $k \geq 1$ tale che la seconda relazione in (4) è soddisfatta con $T = T_k$.

3. Poniamo

$$\gamma := \frac{\beta}{|\alpha|} \ , \qquad\qquad a := y - y' + \frac{\beta}{\alpha}(x' - x) \ ; \tag{11}$$

si noti che poiché α/β è irrazionale, lo è anche γ. Con queste definizioni si ha

$$p(y + \beta T_k) - y' = a + \gamma k - [y' + a + \gamma k] \ ,$$

e, quindi, la seconda disuguaglianza in (4) diviene:

$$|a + \gamma k - [y' + a + \gamma k]| < \varepsilon \ . \tag{12}$$

4. *Se ε è sufficientemente piccolo, basta dimostrare che esistono due interi $k \geq 1$ e h tali che*

$$|a + \gamma k - h| < \varepsilon \ . \tag{13}$$

Infatti, supponiamo che valga (13) con

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := \min\{y_1 \ , \ 1 - y_1\} \ . \tag{14}$$

Chiamiamo $b := a + \gamma k$ e $j = [y' + b] = [y' + a + \gamma k]$. Dalla definizione di parte intera si ha che

$$b - j = \Big(y' + b - [y' + b]\Big) - y' \in [-y', 1 - y') \ . \tag{15}$$

Dunque, essendo per (13),

$$-\varepsilon < h - b < \varepsilon \ ,$$

si ha che

$$-\varepsilon - y' < (h - b) + (b - j) = h - j < \varepsilon + 1 - y' \ .$$

D'altra parte (14) implica che $-1 < -\varepsilon - y'$ e $\varepsilon + 1 - y' < 1$, e quindi $-1 < h - j < 1$, il che significa (essendo $h - j$ un intero) che $h = j$. Possiamo concludere che

$$|a + \gamma k - [y' + a + \gamma k| = |b - [y' + b]| = |b - j| = |b - h| < \varepsilon \ .$$

5. Fissiamo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e dimostriamo la (13). Per il teorema di Liouville (vedi punto **4**), esistono due interi $r \geq 1$ e s tali che

$$|\gamma r - s| < \varepsilon \ . \tag{16}$$

Per l'irrazionalità di γ, il numero

$$\delta := \gamma r - s$$

è diverso da 0. Supponiamo dapprima che $\delta > 0$ e poniamo

$$\bar{a} := 1 + [a] - a \ ,$$

che, per la definizione di parte intera, appartiene all'intervallo $(0, 1]$. Fissiamo un intero $M > 1/\delta$ e consideriamo gli $M+1$ punti $i\delta$ al variare di $0 \leq i \leq M$. Tali punti suddividono l'intervallo $[0, M\delta)$ in M intervalli $[(i-1)\delta, i\delta)$ di ampiezza δ. Poiché $\bar{a} \in (0, 1] \subset [0, M\delta]$ esiste un intero $1 \leq i \leq M$ tale che

$$|i\delta - \bar{a}| < \delta < \varepsilon \ ,$$

il che, essendo

$$i\delta - \bar{a} = a + \gamma(ir) - (is + 1 + [a]) \ ,$$

implica la (13) con $k = ir \geq 1$ e $h = is + 1 + [a]$.

Nel caso $-\varepsilon < \gamma r - s < 0$ poniamo

$$\delta := s - \gamma r \in (0, \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad \bar{a} := [a] - a \in (-1, 0]$$

e ragioniamo in modo analogo suddividendo l'intervallo $(-M\delta, 0]$ ($M > 1/\delta$ intero) negli M intervalli $(-i\delta, -(i-1)\delta]$ di ampiezza $\delta < \varepsilon$: poiché $\bar{a} \in (-1, 0] \subset (-M\delta, 0]$ esiste un $1 \leq i \leq M$ tale che

$$|\bar{a} + i\delta| < \varepsilon \ ,$$

il che, essendo

$$-(\bar{a} + i\delta) = a + \gamma(ir) - (is + [a])$$

implica la (13) con $k = ir \geq 1$ e $h = is + [a]$. **CVD**