15/2/06

Periodicità e meccanica celeste (un possibile percorso)

I. Funzioni ricorsive e sistemi dinamici unidimensionali

Ad una data funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo associare , per *ricorsività*, una successione $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ secondo la legge

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad n \geq 1 \tag{1}$$

avendo scelto un *punto iniziale* $x_0 \in \mathbb{R}$.
Il punto di vista "dinamico" consiste nello studio delle *orbite*

$$\mathcal{O}(x_0) := \{x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ ...\}$$

al variare di x_0. Alcune domande tipiche sono:

D1 Per quali valori di x_0 l'orbita $\mathcal{O}(x_0)$ è limitata (illimitata)?

D2 Esistono orbite periodiche (un'orbita $\{x_n\}$ si dice periodica di periodo $k \geq 1$ se $x_{n+k} = x_n$ per ogni $n \geq 0$)?

D3 Le orbite periodiche sono "stabili" ("instabili")?

Esempio 1 $f(x) = x^2$.
In questo caso è facile descrivere completamente la dinamica. Infatti $x_n = x_0^{2^n}$ e:
(i) se $|x_0| < 1$ allora $x_n \to 0$;
(ii) se $|x_0| > 1$ allora $x_n \to \infty$;
(iii) $x_0 = 0$ è un punto fisso (ovvero un'orbita periodica di periodo 1) stabile, cioè esiste un intorno U di x_0 (che poi è $(-1, 1)$) le cui orbite rimangono vicine a (in effetti vanno a finire su) $x_0 = 0$;
(iv) $x_0 = 1$ è un punto fisso "instabile" (:= non stabile);
(v) $f(-1) = 1$ e torniamo a (iv).
In particolare, ci sono solo due orbite periodiche (punti fissi). Variando leggermente questo esempio la dinamica si arricchisce notevolmente:

Esempio 2 $f(x) = x^2 - 1$.
Esistono due (unici) punti fissi (ossia due punti $x_\pm$ tali che $x_\pm = f(x_\pm)$) e sono

$$x_+ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ , \qquad x_- = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ .$$

$\mathcal{O}(0)$ è un'orbita periodica di periodo 2. Esistono altre orbite periodiche di periodo 2? (Risposta: sì)

Trovare orbite periodiche di periodo k equivale a trovare radici reali di un polinomio di grado 2^k. Qui ROBERTO potrebbe sbizzarrirsi con metodi numerici per trovare radici.

C'è una maniera utile di visualizzare le orbite "muovendosi" alternatamente lungo rette parallele all'asse delle y e all'asse delle x:

$x_0 \to$ grafico di $f \to$ bisettrice $y = x \to$ grafico di $f \to$ bisettrice $y = x \to \cdots$
(vedi figura.pdf allegata)

Da questa visualizzazione segue facilmente, ad esempio, che se $x_0 > x_+$ allora $x_n \to \infty$.

Alcuni problemi su cui si potrebbe lavorare sono i seguenti:

P1 Trovare (il più grande) $\bar{x} < 0$ tale che se $x_0 < \bar{x}$ allora $x_n \to \infty$.

P2 È vero che esistono *infinite* orbite periodiche (distinte)?

Schema di una possibile prosecuzione:

II. Sistemi dinamici bidimensionali

Data $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si studia $(x_n, y_n) = \vec{f}(x_{n-1}, y_{n-1})$. Qui la dinamica è molto più complicata. Magari si potrebbe studiare un po' il caso lineare

$$(x_n, y_n) = \Big(ax_{n-1} + by_{n-1} \ , \ cx_{n-1} + dy_{n-1}\Big) \ . \qquad (2)$$

III. Un caso speciale: l'oscillatore armonico discreto

Un caso speciale di (2) è:

$$(x_n, y_n) = \Big(x_{n-1} + \varepsilon y_{n-1} \ , \ -\omega^2 \varepsilon x_{n-1} + y_{n-1}\Big)$$

che è la (3.12) del file di Roberto. Andando a ritroso nel file di Roberto (facendo il limite per $\varepsilon \to 0$) si ottiene l'equazione differenziale della linearizzazione del pendolo ossia dell'oscillatore armonico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (e $y = \dot{x}$).

Soluzioni esplicite dell'oscillatore armonico.
L'oscillatore armonico come approssimazione ("piccole oscillazioni") del pendolo.

IV. Due oscillatori armonici e risonanze

V. Tori bidimensionali e flussi lineari su tori

VI. Un modello semplice di meccanica celeste e el eclissi