

Argomenti complementari del corso di
Analisi Numerica 3

Roberto Ferretti

June 8, 2006

Indice

1	Stabilità l^∞ del metodo alle differenze per l'equazione di Poisson	2
2	Stime integrali di errore per l'interpolazione \mathbb{P}_1	4
3	Stabilità del metodo di Galerkin per equazioni paraboliche	6
4	Il metodo di Courant–Isaacson–Rees	7

1 Stabilità l^∞ del metodo alle differenze per l'equazione di Poisson

In una dimensione, il metodo alle differenze seconde centrate per l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

prende, come si è visto, la forma

$$A_h U = F \quad (1.2)$$

dove $U = (u_1 \cdots u_N)^t$, $F = (f(x_1) \cdots f(x_N))^t$, e:

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

In questo caso, la condizione di stabilità da verificare è

$$\|A_h^{-1}\| \leq C \quad (1.4)$$

dove ovviamente la norma da utilizzare coincide con quella usata nella analisi di consistenza. Dimostriamo la maggiorazione (1.4) nella norma l^∞ in due passi: nel primo si dimostra che A_h^{-1} ha elementi positivi, nel secondo se ne calcola la norma.

- *Passo 1: A_h^{-1} ha elementi positivi*

Le righe di A_h^{-1} possono essere calcolate esplicitamente. In effetti, scritta la matrice come $A_h^{-1} = (X_1 \cdots X_N)$, la j -esima colonna X_j di A_h^{-1} è soluzione del problema

$$A_h X_j = e_j \quad (1.5)$$

ovvero rappresenta in qualche modo la "soluzione fondamentale discreta" associata al termine noto e_j . La soluzione di (1.5) ha differenze seconde nulle ovunque tranne che nel nodo x_j , presenta quindi la struttura mostrata in fig. 1.

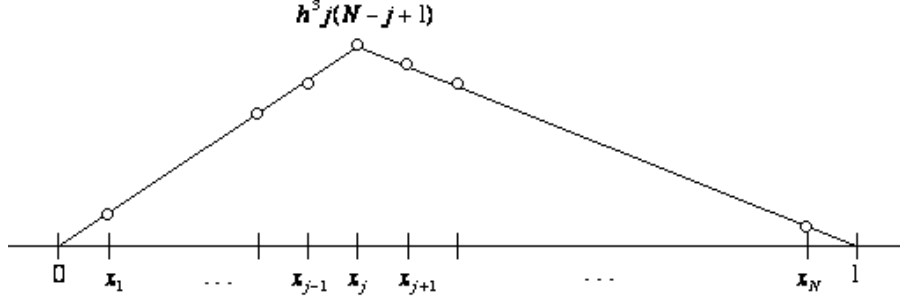


Figura 1. Soluzione del problema (1.5).

Il vettore X_j ha elementi che crescono con rapporto incrementale costante fino al valore $h^3 j(N-j+1)$ che viene ottenuto in corrispondenza del nodo x_j , dopodiché tornano a zero ancora con rapporto incrementale costante. L'unica differenza seconda diversa da zero si ha in x_j e vale

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left(-\frac{h^3 j(N-j+1)}{(N-j+1)h} - \frac{h^3 j(N-j+1)}{jh} \right) = \\ \frac{1}{h} (-h^2 j - h^2(N-j+1)) = -(N+1)h = -1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

e si tratta quindi proprio della soluzione X_j di (1.5). Di conseguenza tutte le colonne di A_h^{-1} hanno elementi strettamente positivi. Per altra strada, si poteva arrivare a questo risultato verificando che A_h é una M-matrice (vedi [2]).

- *Passo 2: Maggiorazione della norma $\|A_h^{-1}\|_\infty$*

Poiché la matrice A_h^{-1} ha elementi positivi, la sua norma $\|A_h^{-1}\|_\infty$ può essere calcolata come

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \|A_h^{-1} F_1\|_\infty \quad (1.7)$$

in cui $F^1 = (1 \cdots 1)^t$ e a secondo membro si calcola chiaramente la norma di un vettore. Il vettore $V = A_h^{-1} F_1$ é soluzione del problema

$$A_h V = F_1 \quad (1.8)$$

ed ancora se ne possono calcolare esplicitamente gli elementi come

$$v_j = \frac{h^2}{2} j(N-j+1). \quad (1.9)$$

Si può verificare che il vettore definito da (1.9) é soluzione di (1.8) sia calcolando direttamente le differenze seconde, sia ricordando che $v_j = v(x_j)$, dove la funzione positiva

$$v(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$$

é soluzione del corrispondente problema continuo

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

ed essendo un polinomio di secondo grado, le sue differenze seconde coincidono con le derivate seconde (ovvero, in questo caso il metodo alle differenze calcola la soluzione esatta nei nodi). D'altra parte,

$$\max_{[0,1]} \frac{1}{2}x(1-x) = \frac{1}{8}$$

e di conseguenza si ha anche $\|A_h^{-1}\|_\infty = \|V\|_\infty \leq 1/8$.

2 Stime integrali di errore per l'interpolazione

\mathbb{P}_1

Mentre la teoria classica dell'interpolazione fornisce stime di errore uniformi, ma valide sotto l'ipotesi di limitatezza di un certo numero di derivate, nella teoria dei metodi di Galerkin é utile avere stime di errore in norme piú deboli, ma con ipotesi corrispondentemente piú generali. In particolare, la regolaritá si caratterizza usualmente in spazi di Sobolev, e le stime di errore vanno adattate a questa situazione.

Indicando con u_I la interpolata ad elementi finiti della funzione u e riferendosi al caso piú semplice della interpolazione \mathbb{P}_1 in una dimensione spaziale, dimostriamo che valgono le stime seguenti:

$$\|u - u_I\|_0 \leq Ch\|u\|_1 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.1)$$

$$\|u - u_I\|_0 \leq Ch^2\|u\|_2 \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

$$\|u - u_I\|_1 \leq Ch\|u\|_2 \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad (2.3)$$

Per tutte e tre le stime inizieremo dimostrando la maggiorazione su di un singolo intervallo del tipo $[jh, (j+1)h]$ e poi sommando i contributi di tutti gli intervalli. Per semplicitá di notazione, considereremo convenzionalmente l'intervallo $[0, h]$.

Iniziamo dimostrando (2.1). Per una funzione $u \in H_0^1$ si ha ovviamente

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)dt$$

e questa scrittura vale in $[0, h]$ anche per u_I utilizzando come derivata (costante) la media integrale di u' . Si ha quindi

$$u_I(x) = u(0) + \frac{x}{h} \int_0^h u'(t) dt$$

e di conseguenza

$$|u - u_I|^2 \leq \left(\int_0^x u'(t) dt - \frac{x}{h} \int_0^h u'(t) dt \right)^2 \quad (2.4)$$

da cui, utilizzando la disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$, si ottiene

$$|u - u_I|^2 \leq 2 \left(\left| \int_0^x u'(t) dt \right|^2 + \frac{x^2}{h^2} \left| \int_0^h u'(t) dt \right|^2 \right). \quad (2.5)$$

Scrivendo ora il primo integrale come un integrale su $[0, h]$ ed applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\begin{aligned} |u - u_I|^2 &\leq 2 \left(x \int_0^h |u'(t)|^2 dt + \frac{x^2}{h^2} h \int_0^h |u'(t)|^2 dt \right) \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2} \right) h \int_0^h |u'(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tenendo conto ora del fatto che

$$\int_0^h \left(\frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2} \right) dx = \frac{5}{6} h$$

si ottiene (da ogni intervallo elementare):

$$\int_{jh}^{(j+1)h} |u - u_I|^2 dx \leq \frac{5}{6} h^2 \int_{jh}^{(j+1)h} |u'(t)|^2 dt$$

e sommando quindi su tutti gli intervalli:

$$\|u - u_I\|_0^2 = \int_{\Omega} |u - u_I|^2 dx \leq \frac{5}{6} h^2 \int_{\Omega} |u'(t)|^2 dt \leq Ch^2 \|u\|_1^2 \quad (2.7)$$

dove l'ultimo passaggio discende dalla disuguaglianza di Poincaré. Passando alle radici si ottiene finalmente (2.1).

3 Stabilità del metodo di Galerkin per equazioni paraboliche

Come sempre nei metodi di Galerkin, poniamo il problema nella forma semi-discreta

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}u_h, v_h\right) + a(u_h, v_h) = L(v_h) & \text{per ogni } v_h \in V_h, t \geq 0 \\ u_h(0) = P_h u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

con $V_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ e $P_h : V \rightarrow V_h$ una opportuna proiezione. Si suppone che la forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ sia coercitiva, e piú precisamente

$$\alpha \|u\|_1^2 \leq a(u, u). \quad (3.2)$$

Per dimostrare la equilimitatezza delle soluzioni utilizziamo come funzione test la stessa $u_h(t)$, riscrivendo quindi la (3.1) ad un certo istante $t > 0$ come:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}u_h(t), u_h(t)\right) + a(u_h(t), u_h(t)) = L(u_h(t)). \quad (3.3)$$

Il primo termine della (3.3) può essere riscritto

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}u_h(t), u_h(t)\right) &= \int_{\Omega} u_h(t) \frac{\partial}{\partial t}u_h(t) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} u_h^2(t) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_0^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

mentre per il secondo vale la ovvia minorazione

$$a(u_h(t), u_h(t)) \geq \alpha \|u_h(t)\|_1^2. \quad (3.5)$$

Il terzo termine può essere dapprima maggiorato con la disuguaglianza di Hölder come

$$L(u_h(t)) = \int_{\Omega} f(t) u_h(t) dx \leq \|f(t)\|_0 \|u_h(t)\|_0 \leq \|f(t)\|_0 \|u_h(t)\|_1.$$

Utilizzando ora la disuguaglianza ¹

$$ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2,$$

¹Questa disuguaglianza rappresenta una versione piú generale della classica maggiorazione $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, e si dimostra allo stesso modo

e ponendo $\varepsilon = \alpha/2$, otteniamo

$$L(u_h(t)) \leq \|f(t)\|_0 \|u_h(t)\|_1 \leq C \|f(t)\|_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_h(t)\|_1^2. \quad (3.6)$$

Usando ora (3.4)–(3.6) nella (3.3) si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_0^2 + \frac{\alpha}{2} \|u_h(t)\|_1^2 \leq C \|f(t)\|_0^2$$

e finalmente, integrando su un generico intervallo $[0, T]$:

$$\|u_h(T)\|_0^2 + \alpha \int_0^T \|u_h(t)\|_1^2 dt \leq \|u_h(0)\|_0^2 + 2C \int_0^T \|f(t)\|_0^2 dt \quad (3.7)$$

La maggiorazione (3.7) mostra in particolare che la norma L^2 della soluzione numerica resta localmente limitata in tempo, mentre la norma H^1 , pur non essendo necessariamente limitata, resta comunque di quadrato sommabile rispetto a t .

4 Il metodo di Courant–Isaacson–Rees

In questo schema la soluzione numerica dell'equazione del trasporto (che come sempre poniamo per semplicità su tutto l'asse reale)

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

si costruisce mediante il metodo delle caratteristiche, applicato però su un solo passo in tempo alla volta. In altri termini, quello che si discretizza è la formula di rappresentazione della soluzione, scritta tra t_n e $t_{n+1} = t_n + k$ ed in un nodo x_j :

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j - ak, t_n) \quad (4.2)$$

Si utilizza insomma la soluzione a t_n come se fosse il dato iniziale che si fa poi evolvere lungo le caratteristiche per un tempo k . Mediante (4.2) si ricostruirebbe comunque la soluzione esatta, ma poiché il punto $x - ak$ non è in generale un nodo della griglia, il valore della soluzione numerica in quel punto va ricostruito per interpolazione dei valori calcolati al passo n -esimo (ed è questo il punto cruciale della discretizzazione). Indicando la operazione di calcolo dell'interpolata con la notazione $I[U^n](x)$, lo schema prende la forma

$$u_j^{n+1} = I[U^n](x_j - ak) \quad (4.3)$$

Nel caso piú semplice, che é quello originalmente proposto da Courant, Isaacson e Rees, la ricostruzione viene effettuata con una interpolazione di primo grado tra i nodi immediatamente a destra e a sinistra di $x - ak$. Ponendo

$$m = \left[\frac{x - ak}{h} \right] = [x - a\lambda]$$

(dove λ é il numero di Courant e $[\cdot]$ denota la parte intera), i due nodi utilizzati per interpolare sono x_{j+m} e x_{j+m+1} ed i valori delle funzioni di base associate sono rispettivamente

$$a_{j,j+m} = 1 + m - (x - a\lambda)$$

$$a_{j,j+m+1} = (x - a\lambda) - m.$$

Come é ovvio trattandosi di una interpolazione lineare, si tratta di due coefficienti non negativi ed a somma unitaria, quindi lo schema é monotono ed l^∞ -stabile per ogni scelta del passo temporale. Per quanto riguarda la sua consistenza, utilizzando una soluzione esatta da (4.3) si ottiene

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{k} = \frac{I[U^n](x_j - ak) - u(x_j, t_n)}{k}.$$

Il primo membro corrisponde a $u_t(x_j, t_n) + O(k)$. Il secondo membro puó essere messo nella forma

$$\begin{aligned} \frac{I[U^n](x_j - ak) - u(x_j, t_n)}{k} &= \frac{u(x_j - ak, t_n) + O(h^2) - u(x_j, t_n)}{k} = \\ &= \frac{-aku_x(x_j, t_n)}{k} + O\left(\frac{h^2}{k}\right) = -au_x(x_j, t_n) + O\left(\frac{h^2}{k}\right) \end{aligned}$$

dove $O(h^2)$ é l'errore di interpolazione ed il rapporto incrementale di u é stato riscritto mediante il teorema di Lagrange. L'errore di consistenza é quindi dell'ordine $O(k) + O(h^2/k)$ e puó essere mandato a zero utilizzando la relazione $h = o(\sqrt{k})$ tra i due passi di discretizzazione.