AL110 - Algebra 1 - A.A. 2014/2015
Appello A (Gennaio 2015)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) $\rightarrow$ ____________

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1.1a	1.1b	1.2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	3a	3b	3c	3d
punti max	1	2	3	2	2	2	4	4	3	2	2	2	2
valutazione													

esercizio	4.1	4.2	4.3a	4.3b	4.3c	4.3d	5	6.1	6.2	6.3
punti max	2	1	3	4	3	4	3	3	2	6
valutazione										
TOTALE $\rightarrow$							*"bonus"* $\rightarrow$			

AVVERTENZE: *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati a coloro che consegneranno l'elaborato entro la prima scadenza fissata dai docenti ed otterranno una valutazione complessiva positiva.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1.

(1) Sia $z := 2(\sqrt{3} + i) \in \mathbb{C}$.

(a) Si determini $z^{-1} \in \mathbb{C}$ (cioè, si calcolino $x, y \in \mathbb{R}$ in modo che $z^{-1} = x + iy$).

(b) Si trovino le radici quadrate (complesse) del numero z.

(2) Si ricordi che un insieme X si dice *transitivo* se ogni elemento di X è un sottoinsieme di X. Si dimostri che, se X è transitivo, allora $X \cup \{X\}$ è transitivo.

ESERCIZIO 2. Sia $G := \mathbb{R}^*$ l'insieme dei numeri reali non nulli e sia $\star : G \times G \longrightarrow G$ l'operazione binaria su G definita ponendo

$$x \star y := \begin{cases} xy & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x}{y} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(1) Dando per buono che l'operazione $\star$ sia associativa, si verifichi che $(G, \star)$ è un gruppo, indicando esplicitamente l'elemento neutro. Si stabilisca se $(G, \star)$ è abeliano.

(2) Si calcoli l'ordine degli elementi $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Più in generale, si calcoli l'ordine di ogni elemento $x \in G$.

(3) Si descrivano esplicitamente gli elementi dei sottogruppi. $H' := \langle 2 \rangle$, $H'' := \langle -2 \rangle$.

(4) Si stabilisca se $H := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ è un sottogruppo di $(G, \star)$, precisando se è, eventualmente, ciclico.

(5) Per ogni $x \in G$, si calcolino esplicitamente gli insiemi xH e Hx, e si stabilisca se $xH = Hx$.

(6) Si deduca da (5) se H è un sottogruppo normale in G e, in caso affermativo, si determini il numero degli elementi di G/H.

ESERCIZIO 3. Date le permutazioni

$$\sigma := (1\ 2) \circ (4\ 2) \circ (1\ 2\ 3) \qquad \tau := (5\ 6\ 7\ 8\ 9)^{2012} \in \mathbf{S}_9$$

si determini struttura ciclica, ordine e segno di ciascuna delle seguenti permutazioni:

(a) σ , **(b)** τ , **(c)** $\sigma \circ \tau$, **(d)** $\tau \circ \sigma$.

Ripetere Matricola (o altro identificativo) $\rightarrow$ ☐

Cognome:.................................... **Nome:**....................................

ESERCIZIO 4.

(1) Si considerino le seguenti equazioni diofantee lineari un due indeterminate X e Y:

$$81X + 27Y = n\,, \quad 81X + 28Y = n\,, \quad 81X + 33Y = n \quad (n \in \mathbb{Z})\,.$$

Per ciascuna equazione assegnata, si determinino le condizioni sul parametro n sotto le quali l'equazione ammetta soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) Si considerino adesso le seguenti 3 funzioni $e, g, h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nella maniera seguente:

$$e(x,y) := 81x + 27y\,, \qquad g(x,y) := 81x + 28y\,, \qquad h(x,y) := 81x + 33y\,.$$

Si determinino gli insiemi $\mathrm{Im}(e), \mathrm{Im}(g), \mathrm{Im}(h)$, e se ne deduca la eventuale suriettività di qualcuna tra le funzioni date.

(3) Si consideri adesso l'insieme $\boldsymbol{F} := \{f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f \text{ è una funzione}\}$ e si definisca su $\boldsymbol{F}$ la relazione binaria $\leq$ definita ponendo:

$$f \leq f' :\Longleftrightarrow\ (f = f') \vee (\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{Im}(f'))\,.$$

(a) Si verifichi che $\leq$ è un ordine parziale su $\boldsymbol{F}$.

(b) Si caratterizzino gli elementi massimali e gli elementi minimali dell'insieme $(\boldsymbol{F}, \leq)$.

(c) Sia $\alpha \in \mathbb{Z}$, sia $f_\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nella maniera seguente:

$$f_\alpha(x,y) := \alpha x + 3\,.$$

Si disegni il grafico dell'ordine $\leq$ sul sottoinsieme $\boldsymbol{G} := \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$ di $\boldsymbol{F}$, individuando eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di $(\boldsymbol{G}, \leq)$.

(d) Dette $l,\ m : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ le funzioni definite ponendo

$$l(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad m(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } y > 0 \\ 3 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

si tracci il grafico dell'ordine $\leq$ sull'insieme $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{G} \cup \{e, g, h, l, m\}$, essendo e, g, h le funzioni definite in (2), e si trovi eventuale estremo inferiore e superiore di $\{l, m\}$ in $\boldsymbol{H}$.

ESERCIZIO 5. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ se vale qualcuna delle seguenti formule:

($\mathbf{a}_n$) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = \dfrac{n(n+3)}{2} - 1\,;$

($\mathbf{b}_n$) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = (n+1)^2\,;$

($\mathbf{c}_n$) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2\,;$

($\mathbf{d}_n$) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = \dfrac{(n+1)(n+3)}{2}\,.$

ESERCIZIO 6. (Baccalauréat C, Francia, 1982)
Sia $\mathbb{F}_7$ il campo $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Si consideri il polinomio

$$f(T) := T^2 + [2]_7 T + [6]_7 \in \mathbb{F}_7[T]\,.$$

(1) Si fattorizzi il polinomio $f(T) \in \mathbb{F}_7[T]$ come prodotto di polinomi (monici) irriducibili in $\mathbb{F}_7[T]$.

(2) Si determini un divisore dello zero non banale dell'anello quoziente $A := \mathbb{F}_7[T]/(f(T))$.

(3) Si determinino tutti e soli i numeri naturali $b \geq 7$ tali che il numero naturale x la cui espressione in base b è $x := (126)_b$ è divisibile per 42.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.

(1a) $z^{-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} - i\dfrac{1}{8}$.

(1b) $z^{1/2} = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - i\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(2) Sia $T := X \cup \{X\}$ e sia $x \in T$. Bisogna dimostrare che $x \subseteq T$. Supponiamo sia $x \in X$.
Poiché X è transitivo, si ha $x \subseteq X$ e, a fortiori $x \subseteq T$. Se invece $x = X$, si ha ancora $x \subseteq T$ (perché $X \subseteq T$).

SOLUZIONE ESERCIZIO 2.

(1) L'elemento neutro di G, rispetto a $\star$ è 1. Sia adesso $x \in G$. Se $x > 0$, allora $x \star \dfrac{1}{x} = 1$; se invece $x < 0$, allora $x \star x := x\dfrac{1}{x} = 1$. Dunque ogni elemento di G è invertibile rispetto a $\star$. Resta provato che $(G, \star)$ è un gruppo.
Poiché $-2 \star 2 = -1 \neq -4 = 2 \star (-2)$, G non è abeliano.

(2) Sia $x > 0$. Si ha $\underbrace{x \star x \ldots \star x}_{n\text{-volte}} = x^n$ e , per elementari proprietà dei numeri reali, $x^n = 1$ se e solo se $x = 1$. Dunque ogni numero reale positivo distinto da 1 ha ordine infinito in $(G, \star)$. Se invece $x < 0$ si ha $x \star x = 1$. Dunque, ogni numero reale negativo ha ordine 2.

(3) Stante (2), $H' = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e $H'' = \{1, -2\}$.

(4) Ovviamente $1 \in H$. Inoltre $\star$ è un'operazione su H, in quanto, presi comunque $x, y \in H$, si ha $x \star y := xy \in H$. Infine, se $x \in H$, l'inverso di x rispetto a $\star$ è, per definizione, $\frac{1}{x}$ e ovviamente $\frac{1}{x} \in H$. Ciò prova che H è un sottogruppo di G.
I gruppi ciclici infiniti sono numerabili (essendo isomorfi a $(\mathbb{Z}, +)$). Siccome H è più che numerabile, non può essere ciclico.

(5) Sia $x \in G$. Se $x \in H$, allora $xH = H = Hx$.
Supponiamo adesso $x \in G \setminus H$, i.e., $x < 0$. Allora

$$xH := \{x \star h \mid h \in H\} = \left\{\frac{x}{h} \mid h \in H\right\}$$

$$Hx := \{h \star x \mid h \in H\} = \{hx \mid h \in H\}$$

Tenendo presente che l'inverso di ogni $h \in H$, rispetto a $\star$, è $\frac{1}{h} \in H$ si ha, per ogni $x \in G \setminus H$

$$x \star h = \frac{x}{h} = \frac{1}{h} \star x \in Hx$$

e inoltre

$$h \star x = hx = x \star \frac{1}{h} \in xH$$

Dunque $xH = Hx$ per ogni $x \in G$, i.e., H è normale in G.

(6) Siano $x, y \in G \setminus H$. Poiché y ha ordine 2, l'inverso y^{-1} di y, rispetto a $\star$, è y, e pertanto $x \star y^{-1} = x \star y = \frac{x}{y} \in H$, essendo $x, y < 0$. Ciò prova che tutti i numeri negativi sono in relazione, rispetto alla relazione di equivalenza canonicamente indotta da H. Dunque, il gruppo quoziente G/H ha due elementi, precisamente $1 \star H = H$ e $x \star H = G \setminus H$ for each $x \in G \setminus H$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3. Si tratta dell'Esercizio 8 della lista di esercizi "natalizi" (che è stato discusso in occasione dell'ultimo tutorato).

(3a) $\sigma = (1\ 4) \circ (2\ 3)$, ordine 2, permutazione pari;
(3b) $\tau = (5\ 6\ 7\ 8\ 9)^2 = (5\ 7\ 9\ 6\ 8)$, ordine 5, permutazione pari;
(3c&d) $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau = (1\ 4) \circ (2\ 3) \circ (5\ 7\ 9\ 6\ 8)$, ordine 10, permutazione pari.

SOLUZIONE ESERCIZIO 4.

(1) La prima equazione diofantea ammette soluzioni per ogni $n \in 27\mathbb{Z}$, la seconda ammette soluzioni per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la terza equazione ammette soluzioni per ogni $n \in 3\mathbb{Z}$.

(2) Stante (1), $\mathrm{Im}(e) = 27\mathbb{Z}, \mathrm{Im}(g) = \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(h) = 3\mathbb{Z}$. Dunque delle tre funzioni assegnate solo g è surgettiva.

(3a) Immediata conseguenza delle definizioni.

(3b) Gli elementi massimali di $(\boldsymbol{F}, \leq)$ sono le funzioni surgettive, quelli minimali le funzioni costanti.

(3c) Per $\alpha = 0$, f_α è costante e $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \{3\}$. Per $\alpha \neq 0$ si ha $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \alpha\mathbb{Z} + 3 := \{\alpha x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}\} \supsetneq \{3\} = \mathrm{Im}(f_0)$. Dunque, per definizione $f_0 < f_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, i.e., f_0 è il minimo di $(\boldsymbol{G}, \leq)$. E' facile far vedere che, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si ha $\mathrm{Im}(f_\alpha) \subseteq \mathrm{Im}(f_\beta)$ se e solo se β divide α in $\mathbb{Z}$. Inoltre $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathrm{Im}(f_{-\alpha})$, i.e., f_α e $f_{-\alpha}$ sono incomparabili, rispetto a $\leq$. Dunque, $f_\alpha < f_\beta$ se e solo se β divide α e $\beta \neq \pm\alpha$. Segue immediatamente che gli elementi massimali di $(\boldsymbol{G}, \leq)$ sono f_1, f_{-1}.

(3d) Poiché $\mathrm{Im}(l) = \mathrm{Im}(m) = \{0, 3\}$ e $l \neq m$ (per esempio $l(1,0) = 0 \neq 3 = m(1,0)$), l, m sono incomparabili in $(\boldsymbol{F}, \leq)$. L'estremo inferiore di $\{l, m\}$ in $\boldsymbol{H}$ è ovviamente f_0, l'estremo superiore non esiste. Infatti $g > h$ sono maggioranti di $\{l, m\}$ (mentre e non lo è). Non è difficile mostrare che, se $\alpha \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, allora f_α è maggiorante di $\{l, m\}$ se e solo se $\alpha \in E := \{\pm 1, \pm 3\}$. Ma l'insieme $\{g, h, f_\alpha : \alpha \in E\}$ non ha minimo, come facilmente si verifica.

SOLUZIONE ESERCIZIO 5.

($\mathbf{a}_n$) Non vale per $n = 2$ (vale per $n = 1$).
($\mathbf{b}_n$) Non vale per $n = 1$.
($\mathbf{c}_n$) Vale per $n = 1$. Passo induttivo: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
($\mathbf{d}_n$) Non vale per $n = 1$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 6.

(1) $f(T) = (T - [2]_7)(T - [3]_7)$.

(2) $(T - [2]_7) + (f(T))$ (ed anche $(T - [3]_7) + (f(T))$) è un divisore dello zero in A.

(3) Si cercano tutti i numeri naturali b tali che $b^2 + 2b + 6$ è divisibile per 42, i.e., b soddisfa entrambe le congruenze $b^2 + 2b + 6 \equiv_7 0$ e $b^2 + 2b + 6 \equiv_6 0$. Stante (1), la prima congruenza equivale a $b \equiv_7 2$ oppure $b \equiv_7 3$. La seconda congruenza equivale a $b(b+2) \equiv_6 0$, che a sua volta equivale a $b(b+2) \equiv_2 0$ e $b(b+2) \equiv_3 0$, i.e., $b \equiv_2 0$ e $b \equiv_3 0$ oppure $b \equiv_3 1$. In altre parole, $b \equiv_6 0$ oppure $b \equiv_6 4$, come facilmente si osserva. Pertanto, i valori di $b \geq 7$ da trovare sono soluzioni dei seguenti quattro sistemi di congruenze:

$$\begin{cases} b \equiv_7 2 \\ b \equiv_6 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} b \equiv_7 2 \\ b \equiv_6 4 \end{cases} , \quad \begin{cases} b \equiv_7 3 \\ b \equiv_6 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} b \equiv_7 3 \\ b \equiv_6 4 \, . \end{cases}$$

A calcoli fatti le soluzioni sono rispettivamente $b = 30, 16, 24, 10 \pmod{42}$.