AL110 - Algebra 1 - A.A. 2014/2015
Appello X (Settembre 2015)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) → [ ]

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3
punti max	3	3	4	2	6	4	4	2	6	2	3	3
valutazione												

esercizio	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6.1	6.2	6.3
punti max	4	2	4	3	3	3	3	5
valutazione								
TOTALE →				*"bonus"* →				

AVVERTENZE: *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– *Fino a* **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– *La soluzione degli esercizi deve essere scritta negli appositi spazi bianchi di questo fascicoletto. Non debbono essere consegnati altri fogli.*

LEGGERE LE AVVERTENZE
NON SFOGLIARE IL TESTO
PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. Sia R l'insieme delle matrici del tipo seguente:

$$\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a\,,\ b \in \mathbb{Z}\,.$$

(1) Mostrare che $(R, +, \cdot\ )$ è un sottoanello dell'anello delle matrici quadrate 2×2 ad entrate in $\mathbb{R}$, cioè di $(\boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{R}), +, \cdot\ )$.

(2) Stabilire se $(R, +, \cdot\ )$ è commutativo, se è unitario e se possiede divisori dello zero.

(3) Stabilire se il sottoinsieme S di R formato dalle matrici della forma seguente:

$$\begin{pmatrix} x & (3y+x)\sqrt{5} \\ -(3y+x)\sqrt{5} & x \end{pmatrix}, \qquad \text{con } x\,,\ y \in \mathbb{Z}\,.$$

forma un ideale di $(R, +, \cdot\ )$.

ESERCIZIO 2. **(1)** Si enunci il Teorema di divisione con resto in $K[T]$, cioè nell'anello dei polinomi in una indeterminata T a coefficienti in un campo K.

(2) Si dimostri il Teorema di divisione con resto in $K[T]$.

(3) Si mostri con un controesempio che il Teorema di divisione con resto tra polinomi in una indeterminata non vale per i polinomi di $\mathbb{Z}[T]$.

(4) Si trovi un polinomio g a coefficienti razionali, $g \in \mathbb{Q}[T]$, in modo tale che g generi l'ideale nucleo dell'omomorfismo di anelli $\psi : \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definito ponendo $\psi(f) := (f(1), f(\sqrt{2}))$, per ogni $f \in \mathbb{Q}[T]$.

ESERCIZIO 3. **(1)** Enunciare il Teorema fondamentale dell'omomorfismo per gruppi.

(2) Dimostrare il Teorema fondamentale dell'omorfismo per gruppi.

(3) Sia $\overline{z}$ un intero fissato, $\overline{z} \neq 0$. In $\mathbb{Z}$, si consideri la seguente operazione binaria $*$ così definita:

$$a * b := a + b + \overline{z} \qquad \text{presi comunque } a, b \in \mathbb{Z}\,.$$

(3.1) Verificare se $(\mathbb{Z}, *)$ è oppure non è un gruppo abeliano.

(3.2) Stabilire se l'applicazione $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definita da $\lambda(n) := n(1 - \overline{z}) + (n-1)\overline{z}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, verifica oppure non verifica la proprietà:

$$\lambda(n + m) = \lambda(n) * \lambda(m) \quad \text{presi comunque } n, m \in \mathbb{Z}\,.$$

(3.3) Stabilire se $\lambda : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, *)$ è oppure non è un isomorfismo di gruppi.

Ripetere Matricola (o altro identificativo) $\rightarrow$

Cognome:.................................... **Nome:**....................................

ESERCIZIO 4. Siano $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri interi primi e T un'indeterminata su $\mathbb{Z}$. Per ogni $p \in \mathbb{P}$, si consideri il polinomio

$$f := f(T) := T^4 + 10pT + 3p \in \mathbb{Z}[T]\,.$$

(1) Al variare di $p \in \mathbb{P}$, si dica quando il polinomio f è irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$. D'altro lato, quando il polinomio f è riducibile in $\mathbb{Z}[T]$, si trovi esplicitamente la sua espansione come prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[T]$.

(2) Per $p = 3$, si consideri l'anello quoziente $A := \mathbb{Q}[T]/f\mathbb{Q}[T]$, e si dica se A è un dominio e/o un campo.

(3) Per $p = 3$, si dica se l'elemento $[T^2] \in A$ è invertibile e, in tale eventualità, si determini un polinomio $g(T) \in \mathbb{Q}[T]$ tale che $[g(T)] = [T^2]^{-1}$.

ESERCIZIO 5. Siano G un gruppo e H un sottogruppo di G.

Sia $n \geq 1$, dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti asserzioni, fornendo un argomento conciso ed esauriente.

(1) Se G ha ordine n, allora H ha ordine un divisore di n.

(2) Se G ha ordine n e d è un divisore di n, allora esiste un sottogruppo K di G di ordine d.

ESERCIZIO 6. Si risolvano le seguenti questioni, esibendo un argomento conciso ed esauriente.

(1) Sia $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{Z}$. Si consideri la funzione $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definita ponendo:

$$f(X) := \begin{cases} X \cup \mathbb{N} & \text{se } \mathbb{N} \not\subseteq X\,, \\ X \setminus \mathbb{N} & \text{se } \mathbb{N} \subseteq X\,. \end{cases}$$

Si stabilisca se f è iniettiva e/o suriettiva.

(2) Sia p un numero intero primo e $K := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
Se esiste, si trovi esplicitamente un polinomio $g(T) \in K[T]$ di grado positivo e tale che $g(a) = g(b)$, per ogni $a, b \in K$.

(3) *Epsilon* e la sua amata *Teta* intendono piastrellare la loro ampia terrazza di 1000 m^2 sul lungomare della ridente cittadina di Vattelappesca per organizzare dei tornei di bridge "sotto le stelle" durante il periodo estivo, ed intendono utilizzare piastrelle quadrate da 35 cm e da 20 cm di lato. Sapendo che *Epsilon* e *Teta*, per ragioni estetiche, intendono utilizzare più o meno lo stesso numero di piastrelle dei due tipi, si determini quante piastrelle (di ciascun tipo) useranno.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.

(1) Siano date due matrici in R:

$$A := \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} a' & b'\sqrt{5} \\ -b'\sqrt{5} & a' \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$A - A' = \begin{pmatrix} a - a' & (b-b')\sqrt{5} \\ -(b-b')\sqrt{5} & a-a' \end{pmatrix} \in R,$$
$$AA' = \begin{pmatrix} aa' - 5bb' & (ab'+a'b)\sqrt{5} \\ -(ab'+a'b)\sqrt{5} & aa'-5bb' \end{pmatrix} \in R.$$

(2) R è un anello unitario con la stessa unità di $(\boldsymbol{M}_{2,2}(\mathbb{R}), +, \cdot\ )$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\sqrt{5} \\ 0\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

R è un anello commutativo, perché:

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' - 5bb' & (ab'+a'b)\sqrt{5} \\ -(ab'+a'b)\sqrt{5} & aa'-5bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a - 5b'b & (a'b+ab')\sqrt{5} \\ -(a'b+ab')\sqrt{5} & a'a-5b'b \end{pmatrix} = A'A.$$

R è un anello privo di divisori dello zero. Infatti, altrimenti, dovrebbe accadere che:

$$aa' - 5bb' = 0 \qquad ab' + a'b = 0.$$

A calcoli fatti si dovrebbe quindi avere che $a^2 - 5b^2 = 0$, e ciò è impossibile perché $\sqrt{5} \neq \frac{a}{b}$, presi comunque $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$.

Notare che (1) e (2) possono essere anche dimostrate facendo vedere che l'applicazione $\sigma : R \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, definita da

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ -b\sqrt{5} & a \end{pmatrix}\right) := a - b\sqrt{5},$$

è un isomorfismo di anelli.

(3) Sia

$$X := \begin{pmatrix} x & (3y+x)\sqrt{5} \\ -(3y+x)\sqrt{5} & x \end{pmatrix} \in S,$$

allora:

$$AX = \begin{pmatrix} ax - 15by - 5bx & (3ay + (a+b)x)\sqrt{5} \\ -(3ay+(a+b)x)\sqrt{5} & ax - 15by - 5bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & (3y'+x')\sqrt{5} \\ -(3y'+x')\sqrt{5} & x' \end{pmatrix} \in S,$$

dove:

$$x' := ax - 15by - 5bx, \quad 3ay + (a+b)x = 3y' + x',$$

quindi:

$$x' := ax - 15by - 5bx, \quad y' = \frac{3ay + (a+b)x - (ax - 15by - 5bx)}{3} = \frac{3ay + 6bx + 15by}{3} \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo già dimostrato che R è un anello commutativo, pertanto $XA = AX \in S$.

ESERCIZIO 2 - SOLUZIONE . (1) , **(2)** e **(3)** vedere appunti del corso.

(4) $\mathrm{Ker}(\psi) = ((T-1)(T^2-2))$.

ESERCIZIO 3 - SOLUZIONE . (1) , e **(2)** vedere appunti del corso.

(3) Si noti che $*$ è un'operazione associativa. L'elemento neutro di $(\mathbb{Z}, *)$ è dato da $-\overline{z}$. L'inverso di a rispetto a $*$ è dato da $-a - 2\overline{z}$.

(4) Si noti che $\lambda(n) = n - \overline{z}$ e quindi si può verificare facilmente che $\lambda(n+m) = \lambda(n) * \lambda(m)$, presi comunque $n, m \in \mathbb{Z}$.

(5) $\lambda : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, *)$ è un isomorfismo di gruppi con isomorfismo inverso $\lambda^{-1} : (\mathbb{Z}, *) \to (\mathbb{Z}, +)$ definito da $\lambda^{-1}(n) := n + \overline{z}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 4 - SOLUZIONE.

(1) Stante il criterio di Eisenstein, il polinomio f è irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$ per ogni primo $p \neq 3$. Per $p = 3$, f è riducibile e i suoi fattori irriducibili sono $T + 3, T^3 - 3T^2 + 9T + 3$. Si noti che il secondo polinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}[T]$, essendo 3-Eisenstein.

(2) A fortiori, per $p = 3$ il polinomio f è riducibile in $\mathbb{Q}[T]$. Pertanto, per quanto visto a lezione, l'anello quoziente A non è un dominio (né un campo).

(3) L'elemento $[T^2] \in A$ è invertibile perché $\mathrm{MCD}(T^2, f) = 1$ (infatti altrimenti T^2, f dovrebbero avere un fattore irriducibile in comune, ma ciò è impossibile, essendo T l'unico fattore irriducibile di T^2). Una identità di Bezout è

$$(-10/27T + 1/9)f + (10/27T^3 - 1/9T^2 + 100/9)T^2 = 1.$$

Pertanto $[T^2]^{-1} = [10/27T^3 - 1/9T^2 + 100/9]$.

ESERCIZIO 5 - SOLUZIONE.

(1) Si tratta del Teorema di Lagrange. Per la dimostrazione il candidato consulti gli appunti.

(2) A lezione si è visto che il gruppo alterno A_4 ha ordine 12 ma non ha alcun sottogruppo di ordine 6.

ESERCIZIO 6 - SOLUZIONE.

(1) f non è iniettiva. Infatti $f(\mathbb{N} \setminus \{0\}) = f(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \mathbb{N}$. Inoltre, f non è surgettiva. Per convincersi di ciò basta osservare che, per definizione, per ogni $X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, l'insieme $f(X)$ contiene $\mathbb{N}$ oppure non incontra $\mathbb{N}$. Dunque l'insieme $\{0\}$, per esempio, non appartiene all'immagine di f.

(2) Basta considerare il polinomio $g(T) \in T^p - T \in K[T]$. Infatti, stante il Teorema di Eulero-Fermat, si ha $a^p \equiv a \pmod{p}$, i.e., $g(a) = 0$, per ogni $a \in K$.

(3) Sia X (risp., Y) il numero (incognito) di mattonelle di lato 35 cm (risp., 20 cm) da usare. Si perviene all'equazione diofantea

$$1225X + 400Y = 10000000$$

che ovviamente equivale a $49X + 16Y = 40000$. Con uno dei metodi illustrati a lezione si vede facilmente che tale equazione è risolubile e tutte e sole le sue soluzioni intere positive sono del tipo

$$(x, y) = (16t, 25000 - 49t) \text{ con } t \in \mathbb{Z} \text{ ed } x > 0\,, y > 0\,.$$

Se richiediamo che $x = y$, questa condizione determina $t = 25000/65$ che è circa 384,6. I due valori interi di t più vicini a 384,6 sono 384, 385. Nel primo caso si ha $(x, y) = (6144, 6184)$, nel secondo si ha $(x, y) = (6160, 6135)$.