AL110 - Algebra 1 - A.A. 2014/2015
Valutazione "in itinere" - I Prova (Novembre 2014)

Matricola (O ALTRO IDENTIFICATIVO) →

Cognome: .... **Nome:** ....

---

esercizio	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2
punti max	2	3	3	6	4	5	6	3	4
valutazione									

esercizio	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	6.1	6.2	6.3
punti max	3	4	3	5	7	3	4	8
valutazione								
TOTALE →						*"bonus"* →		

AVVERTENZE: *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato.*
– Fino a **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*
– Fino a **due punti ulteriori (bonus)** *potranno essere assegnati a coloro che consegneranno l'elaborato entro la prima scadenza fissata dai docenti ed otterranno una valutazione complessiva positiva.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO

PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE
INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

ESERCIZIO 1. **(1)** Scrivere in base 10 ciascuno dei seguenti due numeri interi $a,\ b$ scritti qui sotto in base 5:

$$a := (3143)_5 \qquad b := (244)_5 \,.$$

(2) Scrivere in base 5 ed in base 2 il numero $a + b$ (spiegando il procedimento seguito).

(3) Scrivere in base 2, i numeri interi q ed r tali che $a = b \cdot q + r$ dove $0 \leq r \leq b - 1$.

ESERCIZIO 2. (1) Utilizzando il Principio di Induzione, provare che, per ogni $n \geq 1$, la seguente espressione:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$$

è uguale ad una soltanto tra le seguenti:

(a) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!\,;$

(b) $(n+1)! - 1\,;$

(c) $(2n)! - 1\,;$

(d) $(n+1)! - n\,.$

(2) Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ fissate proposizioni logiche. Al variare di $\boldsymbol{H} \in \{\boldsymbol{P},\ \neg\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q},\ \neg\boldsymbol{Q}\}$, stabilire se la proposizione logica

$$(\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{H}) \Rightarrow \boldsymbol{Q}$$

è una tautologia, motivando la risposta.

ESERCIZIO 3. **(1)** Dimostrare che $\texttt{Log}(5)$ (cioè, il logaritmo in base 10 di 5) *non* è un numero razionale (cioè, $\texttt{Log}(5) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

(2) Dare le definizioni di *numero primo* e *numero irriducibile* (in $\mathbb{Z}$) e dimostrare che

$$\text{numero primo} \quad \Leftrightarrow \quad \text{numero irriducibile}\,.$$

ESERCIZIO 4.(1) Siano dati i seguenti numeri complessi

$$u =: 7 + 2i \quad \text{e} \quad v := 2 - 2i.$$

Determinare il numero complesso $z := x + iy$ in modo tale che $u = vz$.

(2) Nell'insieme $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, si consideri la relazione $\boldsymbol{\rho}$, con grafico $R \subseteq \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]$, definita nella maniera seguente:

$$\begin{aligned}(a+bi)\ \boldsymbol{\rho}\ (c+di) \ &:\Leftrightarrow \ \exists\, m\,,\ \ n \in \mathbb{N}\,,\ \text{ in modo tale che } \ c = ma\,,\ b = nd\,,\\ &:\Leftrightarrow \ R := \{(a+bi, c+di) : \exists\, m, n \in \mathbb{N}\,,\ \text{ in modo tale che } \ c = ma\,,\ b = nd\}\,.\end{aligned}$$

Stabilire quali tra le seguenti proprietà:

(R) proprietà riflessiva;
(S) proprietà simmetrica;
(AS) proprietà antisimmetrica;
(T) proprietà transitiva;
(TT) proprietà totale;

sono soddisfatte da $\boldsymbol{\rho}$.

Stabilire, quindi se $\boldsymbol{\rho}$ è una relazione di equivalenza **(E)** oppure una relazione di ordine **(O)** su $\mathbb{Z}[i]$.

ESERCIZIO 5. Sia $\mathbb{D}$ l'insieme dei numeri naturali dispari. Sull'insieme $\boldsymbol{\mathcal{X}} := \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ si consideri la relazione binaria $\leq$ definita ponendo

$$A \leq B \;:\Leftrightarrow\; (A = B) \;\vee\; (A \cup \mathbb{D} \subsetneq B \cup \mathbb{D}) \qquad \text{con } A, B \in \boldsymbol{\mathcal{X}}\,.$$

(1) Si verifichi che la relazione $\leq$ è un ordine parziale su $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. La relazione $\leq$ (su $\boldsymbol{\mathcal{X}}$) è anche totale?

(2) Si ponga $A := \{n(n+1)+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C := \{4^n 10^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, $D := \{3\}$, $E := \{\text{numeri pari}\}$.

Si disegni il grafo della relazione $\leq$ indotta sul sottoinsieme finito $\boldsymbol{\mathcal{Y}} := \{A, B, C, D, E, \mathbb{N}\}$ di $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, determinando eventuali elementi massimali, minimali, massimo e minimo di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$.

(3) Si determinino, se esistono, estremo inferiore e superiore di $\{A, D\}$ in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$.

(4) Si ponga, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{2i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Si verifichi che $\boldsymbol{\mathcal{Z}} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una catena in $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \leq)$ e, se esiste, si trovi un maggiorante di $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ in $\boldsymbol{\mathcal{X}}$.

(5) Si caratterizzino gli elementi massimali di $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \leq)$.

ESERCIZIO 6. Il candidato affronti le seguenti questioni.

(1) Si enunci, senza fornirne la dimostrazione, il risultato che caratterizza la risolubilità di un'equazione diofantea lineare in due incognite $X,\ Y$:

$$aX + bY = c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{Z}\,.$$

(2) Si determinino le eventuali soluzioni $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione diofantea

$$-58X + 89Y = 2\,.$$

(3) I tre leader dei maggiori partiti politici della remota repubblica del Furfantistan, in seguito al naufragio della nave da crociera sulla quale trascorrevano qualche giorno di meritato riposo, invitati dalla cricca dei lobbisti di quel lontano paese, si ritrovano su un'isola deserta. Appena arrivati, tutti insieme raccolgono molte noci di cocco (comunque, più di 200 e meno di 300) e, essendo tutti molto provati, convengono di rinviare al giorno successivo la divisione delle noci di cocco tra di loro. I tre uomini sono allietati da un cagnolino di nome Dudù che uno dei politici aveva portato con sé in crociera (Dudù mangia soltanto polpette "Royal Canin" e quindi snobba le noci di cocco). I leader politici del Furfantistan sono usualmente molto litigiosi. Così, di notte, uno dei politici intuisce che il giorno dopo ci sarebbero state molte discussioni sulla suddivisione delle noci. Tale politico, in compagnia di Dudù, senza chiamare gli altri, divide il mucchio di noci di cocco raccolte in tre parti uguali. Da tale suddivisione avanza una noce di cocco che il politico dà al cagnolino per giocare. Dopo aver nascosto la "propria" parte di noci di cocco, il politico va a dormire. Analogamente, ed in successione, ciascuno degli altri leader politici si sveglia, si avvicina (all'insaputa degli altri) al mucchio di noci di cocco reduce dalla suddivisione del politico precedente, fa una nuova divisione in tre parti uguali, nasconde la propria parte, dà la noce di cocco rimanente al cagnolino per giocare (a tutti avanza una noce di cocco!).

Al mattino, quando tutti i politici si svegliano, effettuano la divisione in tre parti uguali del mucchio (ovviamente ridimensionato), facendo finta che nulla fosse accaduto nella notte; in questo caso la divisione è esatta e così Dudù rimane escluso dalla suddivisione finale.

Si determini, illustrando la procedura usata, il numero totale di noci di cocco raccolte all'inizio e il numero di noci di cocco che ciascuno dei cinque uomini politici ha ottenuto in seguito alla "fraterna" suddivisione mattutina.

$\diamondsuit$

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 1.**
(1) $a = 422, \quad b = 73.$
(2) $a + b = 495 = (3440)_5 = (111101111)_2$
(3) $422 = 73 \cdot 5 + 57, \quad q = 5 = (101)_2, \quad r = 57 = (111011)_2.$

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 2.**
(1) Si procede per assurdo: se $2 = 10^{\frac{a}{b}}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, allora $2^b = 2^a 5^a$ da cui, per il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica, si ricava $b = a$ e $a = 0$: $\Rightarrow\!\Leftarrow$
(2) Vedere teoria esposta a lezione.

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 3.**
(1) $z = 5/13 - 27i/13.$
(2) **(R)**, **(AS)**, **(T)**, **(O)**. Non è né **(S)**, né **(TT)**, né **(E)**.

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 4.**
(1) La risposta esatta è (b): le altre uguaglianze non false ad esempio per $n = 2$.
Base dell'induzione (b) vale per $n = 1$.
Ipotesi induttiva:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = (n+1)! - 1\,.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
[1 \cdot 1! + & 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!] + (n+1) \cdot (n+1)! = \\
&= [(n+1)! - 1] + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! - 1 = \\
&= (n+1)!(1 + n + 1) - 1 = (n+2)! - 1\,.
\end{aligned}$$

(2) Per ogni valore di $\boldsymbol{H} \in \{\boldsymbol{P}, \ \neg\boldsymbol{P}, \ \boldsymbol{Q}, \ \neg\boldsymbol{Q}\}$, la proposizione logica assegnata non è una tautologia.

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 5.** L'ordine parziale $\leq$ non è totale, perché, per esempio, gli elementi $\{1\}, \{3\} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ sono incomparabili. Gli elementi minimali di $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ sono A, D, quelli massimali sono $E, \mathbb{N}$. L'insieme $\{A, D\}$ non ammette estremo inferiore in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$, perché in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ non esiste alcun minorante per $\{A, D\}$. L'estremo superiore di $\{A, D\}$ in $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ è B. Poiché $A_0 < A_1 < \ldots < A_n < \ldots$, l'insieme $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una catena in $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Un maggiorante per tale catena è $\mathbb{N}$. Gli elementi massimali di $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che contengono tutti i numeri pari.

▶▶ **SOLUZIONE ESERCIZIO 6.**
(1) $\mathrm{MCD}(a, b)$ deve dividere c (vedere gli appunti).
(2) L'insieme delle soluzioni della equazione diofantea assegnata è

$$\{(46 + 89t, 30 + 58t) \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

(3) Sia X il numero totale delle noci di cocco raccolte ed Y il numero delle noci cocco della ripartizione mattutina. Sia x_i $(i = 1, 2, 3)$ il numero di noci che l'i-esimo politico sottrae agli altri furtivamente durante la notte. Allora si ha

$$\begin{cases} X = 3x_1 + 1 \\ 2x_1 = 3x_2 + 1 \\ 2x_2 = 3x_3 + 1 \\ 2x_3 = 3Y \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni diofantee, tramite sostituzioni successive, si riconduce all'equazione diofantea
$$8X - 81Y = 38.$$
Fra le soluzioni di tale equazione diofantea, solo una è compatibile con la limitazione data a X (i.e., $X \in [200, 300]$), precisamente $(X, Y) = (268, 26)$.

In altre parole, ciascun politico ottiene 26 noci cocco in seguito alla ripartizione mattutina di 268 noci di cocco raccolte inizialmente.

Precisamente, il primo politico, accompagnato da Dudù, ne ottiene in totale 89 + 26 (+3 a Dudù), il secondo politico ne ottiene in totale 59 + 26, il terzo politico ne ottiene in totale 39 + 26.