Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2014/2015

AL110 – Algebra 1 – Prova utile alla valutazione in itinere

Nome e Cognome ________________________________ **Identificativo** ☐☐☐☐☐☐

▶ **1.** Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (i.e., $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Allora

V **F** Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora l'intersezione di tutti gli insiemi in $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme dell'intersezione di tutti gli insiemi in $\mathcal{G}$.

V **F** Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora l'unione di tutti gli insiemi in $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme dell'unione di tutti gli insiemi in $\mathcal{G}$.

V **F** Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, allora l'intersezione di tutti gli insiemi in $\mathcal{G}$ non è un sottoinsieme dell'unione di tutti gli insiemi in $\mathcal{F}$.

V **F** Se $\mathbb{N} \notin \mathcal{F}$, allora l'unione di tutti gli insiemi di $\mathcal{F}$ è distinta da $\mathbb{N}$.

▶ **2.** Sia U un sottoinsieme di $\mathbb{N}(10) := \{10, 11, 12, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ tale che $10 \notin U$ e, per ogni $k \in U$, si abbia $k+1 \in U$. Allora:

V **F** Se $k \in U$, allora $k + 2014$ appartiene a U.

V **F** $U = \mathbb{N}$.

V **F** $U \subsetneq \mathbb{N}(10)$.

V **F** Se $2014 \in U$, allora, ogni numero naturale k tale che $10 \leq k \leq 2014$ appartiene a U.

V **F** Se $11 \in U$, allora $U = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 11\}$.

▶ **3.** Siano A, B, C insiemi. Allora

V **F** $A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$.

V **F** $(A \cap B) \cap (B \cap A) \neq (A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$.

V **F** $A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$.

V **F** $(A \setminus (B \cap C)) \cup ((B \cap C) \setminus A) = A \cup (B \cap C)$.

▶ **4.** Ricordiamo che un insieme X si dice *transitivo* se ogni elemento di X è un sottoinsieme di X. Allora:

V **F** L'insieme $T := \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ non è transitivo.

V **F** L'insieme $U := \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$ non è transitivo.

V **F** L'insieme $U \setminus T$ è transitivo.

V **F** L'insieme $\mathcal{P}(U)$ non è transitivo.

V **F** Non esiste un insieme X non transitivo tale che $\mathcal{P}(X)$ è transitivo.

▶ **5.** Siano X, Y due insiemi. Allora:

V **F** $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \setminus Y) \cup \mathcal{P}(Y)$.

V **F** $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

V **F** Se $X \neq \emptyset$, allora si ha sempre $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

V **F** Se $X \subseteq Y$, allora $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

V **F** Può avvenire che $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ e $X \nsubseteq Y$.

▶ **6.** Siano $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ interi non nulli.

V **F** $a \mid c \ \wedge\ b \mid c \ \Rightarrow\ ab \mid c$.

V **F** $a \mid c \ \wedge\ b \mid c \ \wedge\ \mathrm{mcm}(a,b) = ab \ \Rightarrow\ ab \mid c$.

V **F** $a \mid c \ \wedge\ b \mid c \ \wedge\ \mathrm{mcm}(a,b) = 1 \ \Rightarrow\ ab \mid c$.

V **F** $a \mid c \ \wedge\ b \mid c \ \wedge\ \mathrm{MCD}(a,b) = 1 \ \Rightarrow\ ab \mid c$.

▶ **7.** Sia $S_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

V **F** Per ogni $n \geq 1$, $S_n = n^2(n+1)^2/4$.

V **F** Per ogni $n \geq 1$, $S_n = n(n+1)(2n+1)/6$.

V **F** Per ogni $n \geq 2$, $S_n > n(n+1)/2$.

V **F** Per ogni $n \geq 1$, $S_n = n^2 + (n-1)^2$.

► **8.** Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ proposizioni logiche. Si scriva la tavola di verità della proposizione $\boldsymbol{S}$ definita da

$$\boldsymbol{S} := \ \boldsymbol{P} \Longrightarrow (\boldsymbol{Q} \Longrightarrow \neg \boldsymbol{R}).$$

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{S}$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

► **9.** Siano $a = 55$ e $b = 34$.
V **F** $\mathrm{MCD}(a, b) = (55 \cdot 34)/(55 + 34)$.
V **F** Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, $\mathrm{MCD}(a, b)$ si ottiene dopo una successione di 7 divisioni, ciascuna con resto non nullo.
V **F** Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, $\mathrm{MCD}(a, b)$ si ottiene sempre dopo una successione di esattamente $b - 1$ divisioni, ciascuna con resto non nullo.
V **F** $\mathrm{mcm}(a, b) = \mathrm{MCD}(a, b) + ab$.
V **F** $\mathrm{mcm}(a, b) = a \cdot b = 1870$.

► **10.** Per ciascuna delle seguenti proposizioni logiche si dica se è logicamente equivalente alla *negazione* della seguente proposizione: *"Homer Simpson, quando lavora nella centrale nucleare di Springfield, mangia ciambelle **e** beve birra"*.
V **F** *"Homer Simpson, quando lavora nella centrale nucleare di Springfield, non mangia hot dogs"*.
V **F** *"Homer Simpson non lavora nella centrale nucleare di Springfield"*.
V **F** *"Homer Simpson, quando lavora nella centrale nucleare di Springfield, non beve ciambelle"*.
V **F** *"Homer Simpson, quando lavora nella centrale nucleare di Springfield, non beve birra o/e non mangia ciambelle"*.

► **11.** Si ponga $X := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Allora:
V **F** $\{\{\emptyset\}\} \subseteq X$.
V **F** $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in X$.
V **F** $X \cap \mathcal{P}(X)$ è un insieme non vuoto.
V **F** $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

► **12.** Sia $h \in \mathbb{Z}$ un numero intero e si consideri l'equazione diofantea $(\star)$ $(2h + 1)X - hY = 2h$ nelle incognite X, Y. Allora
V **F** $(\star)$ ammette soluzioni se e soltanto se h è dispari.
V **F** Se $h = -10$, $(\star)$ non ammette alcuna soluzione $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
V **F** Se $(\star)$ ammette soluzioni, allora h è pari.
V **F** $(\star)$ non ammette soluzioni per ogni valore di $h \in \mathbb{Z}$.

"Le regole del gioco"

(1) *Verranno attribuiti* **3 punti** *per ogni risposta corretta di ciascun esercizio.*

(2) *Non verranno attribuiti punti alle domande a cui non si risponde.*

(3) *Verranno* **tolti 2 punti** *per ogni risposta errata di ciascun esercizio.*

(4) *Per l'esercizio relativo alla compilazione della tabella di verità, verranno attribuiti* **8 punti** *se completamente corretto, mentre verranno* **tolti 2 punti** *se errato (***0 punti** *se non si risponde).*

(5) *Durante lo svolgimento della prova NON È AMMESSA ALCUNA FORMA DI COLLABORAZIONE, E NON È AMMESSO L'USO DI LIBRI O APPUNTI.*
Verranno tolti 3 punti punti al primo richiamo, verranno tolti 9 punti al secondo richiamo. Al terzo richiamo la prova verrà invalidata. ♡♡

Soluzioni: vedere pagina successiva ► ► ►

Soluzioni

- ▶ **1. F-V-F-F**
- ▶ **2. V-F-V-F-V**
- ▶ **3. V-F-V-F**
- ▶ **4. V-F-F-F-V**
- ▶ **5. F-V-F-V-F**
- ▶ **6. F-V-V-V**
- ▶ **7. F-V-V-F**
- ▶ **8. F-V-V-V-V-V-V-V**
- ▶ **9. F-V-F-F-V**
- ▶ **10. F-F-F-V**
- ▶ **11. V-F-V-V**
- ▶ **12. F-F-F-F**