Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2015/2016

AL110 – Algebra 1 – Prova "utile" alla valutazione in itinere

Cognome e Nome ________________________________ **Identificativo** | | | | | | | | |

Utilizzare lo stesso identificativo della Prenotazione on-line

AVVERTENZE

"Le regole del gioco"

(1) *Verranno attribuiti* **3 punti** *per ogni risposta corretta di ciascun esercizio.*

(2) *Non verranno attribuiti punti alle domande a cui non si risponde.*

(3) *Verranno* **tolti 2 punti** *per ogni risposta errata di ciascun esercizio.*

(4) *Per l'esercizio relativo alla compilazione della tabella di verità, verranno attribuiti* **6 punti** *se completamente corretto, mentre verranno* **tolti 2 punti** *se errato (***0 punti** *se non si risponde).*

(4) *Per l'esercizio relativo a Furfantopoli, verranno attribuiti* **6 punti** *se corretto, mentre verranno* **tolti 2 punti** *se errato (***0 punti** *se non si risponde).*

(5) *Durante lo svolgimento della prova NON È AMMESSA ALCUNA FORMA DI COLLABORAZIONE, E NON È AMMESSO L'USO DI LIBRI O APPUNTI.*

ATTENZIONE: Verranno **tolti 3 punti** *al primo richiamo, verranno* **tolti ulteriori 6 punti** *al secondo richiamo. Al terzo richiamo la prova verrà invalidata.*

LEGGERE LE AVVERTENZE

NON SFOGLIARE IL TESTO

PRIMA CHE VENGA DATO UFFICIAMENTE INIZIO ALLA PROVA DAL DOCENTE

* * *

RIPETERE → Cognome e Nome ______________________ **Identificativo** | | | | | | | | |

► **1.** Si ponga $f_0 := 1$, $f_1 := 1$ e, per ogni intero $n \geq 2$, si ponga $f_n := f_{n-2} + f_{n-1}$ (*Numeri di Fibonacci*).

- V F Per ogni $n \geq 1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq f_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$. **V**
- V F Per ogni $n \geq 0$, $\mathrm{MCD}(f_n, f_{n+1}) = f_n \cdot f_{n+1}$. **F**
- V F Per ogni $n \geq 0$, $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+3}$. **F**
- V F Per ogni $n \geq 0$, $\mathrm{mcm}(f_n, f_{n+1}) = f_n \cdot f_{n+1}$. **V**
- V F Per ogni $n \geq 0$, $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} = 2f_{n+2}$. **V**

► **2.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, si ponga:

$$d_n := 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)\,, \qquad p_n := 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n\,.$$

- V F Per ogni $n \geq 1$, $p_n = d_n + n$. **V**
- V F Per ogni $n \geq 1$, $d_n + p_n = \frac{n(n+1)}{2}$. **F**
- V F Per ogni $n \geq 1$, $p_n = n^2 + n$. **V**
- V F Per ogni $n \geq 1$, $d_n = n^2$. **V**
- V F Per ogni $n \geq 1$, $p_n = 2d_n$. **F**

► **3.** Nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} := \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ si considerino le seguenti famiglie di sottoinsiemi, per $k \geq 0$:

$$\boldsymbol{S}_k := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq k\}\,, \quad \boldsymbol{D}_k := \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq k\}\,.$$

- V F $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{D}_k = \{0\}$ **F**
- V F $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{S}_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{D}_k$ **F**
- V F $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{S}_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{D}_k$. **V**
- V F $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{D}_k = \emptyset$. **F**
- V F $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{S}_k = \{0\}$. **V**

► **4.** Siano X un insieme, A, B sottoinsiemi di X e $A{+}B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Allora $X\backslash(A{+}B)$ è uguale a

- V F $(X\backslash A) \cap (X\backslash B) \cup A \cup B$. **F**
- V F $[X\backslash(A \cup B)] \cap A \cap B$. **F**
- V F $A \cap B$. **F**
- V F Nessuna delle precedenti risposte è corretta. **V**
- V F $(X\backslash A){+}(X\backslash B)$. **F**

► **5.** Siano $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ proposizioni logiche. La tavola di verità di $\boldsymbol{S} := (\boldsymbol{R} \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})) \wedge (\boldsymbol{R} \wedge \neg\boldsymbol{P})$ è data da:

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{S}$
V	V	V	**F**
F	F	F	**F**
V	F	F	**F**
V	V	F	**F**
V	F	V	**F**
F	V	V	**V**
F	V	F	**F**
F	F	V	**V**

► **6.** Nella remota città chiamata *Furfantopoli* per essere eletti nel consiglio comunale è necessario essere stati indagati per almeno uno dei seguenti reati: corruzione, associazione mafiosa, e peculato. Attualmente il consiglio eletto è composto da **50** consiglieri comunali. E' noto che **22** consiglieri sono indagati per corruzione, **20** per associazione mafiosa, **19** per peculato. Inoltre, è noto anche che, per ogni coppia di reati sopraelencati, lo stesso numero **4** di consiglieri sono indagati per aver commesso tali reati. Il Sindaco viene eletto a scrutinio segreto tra tutti i consiglieri che sono indagati per tutti e tre i reati. Quanti sono i consiglieri che possono essere eletti Sindaco di Furfantopoli?

- ☐ 25.
- ☐ 5.
- ☐ 3.
- ■ 1. ⟵
- ☐ Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

► **7.** Attualmente il consiglio comunale di *Pinocchiopoli* consiste di 50 consiglieri. Essi si conoscono tutti fra loro, essendo tutti membri del partito di maggioranza, chiamato *La Cricca*, ed è noto che: alcuni di essi mentono sempre, e che i rimanenti dicono sempre la verità. Un giornalista di una emittente locale pone a ciascun consigliere la domanda: *"Quanti sono i mentitori fra voi?"*. I primi 26 consiglieri comunali intervistati rispondono "25", i rimanenti 24 consiglieri rispondono tutti in modo diverso e precisamente indicano tutti i numeri naturali fra "27" e "50".

- **V** **F** Si può dedurre che esattamente un consigliere è un mentitore. **F**
- **V** **F** Si può dedurre che tutti i consiglieri sono mentitori. **F**
- **V** **F** Si può dedurre che ci sono almeno 12 consiglieri che dicono la verità. **F**
- **V** **F** Si può dedurre che ci sono almeno 25 consiglieri che dicono la verità. **F**
- **V** **F** Si può dedurre che ci sono al più 25 mentitori. **F**

Nota. Esattamente 1 consigliere non mente.

► **8.** Ricordiamo che un insieme è transitivo se ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme.
Sia $X := \{\emptyset\}$ e sia $A := \{\emptyset, X, \{X\}\}$.

- **V** **F** L'insieme A è transitivo. **V**
- **V** **F** L'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ è transitivo. **V**
- **V** **F** L'insieme $A \setminus \{\emptyset\}$ è transitivo. **F**
- **V** **F** L'insieme $A \setminus \{\{X\}\}$ è transitivo. **V**
- **V** **F** L'insieme $A \setminus \{X\}$ è transitivo **F**

► **9.** Sia X un insiemi e $\mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti.

- **V** **F** Per ogni insieme X, si ha sempre che $\{X\} \in \mathcal{P}(X)$. **F**
- **V** **F** Per ogni insieme X, si ha sempre che $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(X)$. **V**
- **V** **F** L'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ ha 4 elementi. **V**
- **V** **F** Se $X \neq \emptyset$, allora si ha sempre che $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. **F**
- **V** **F** Per ogni insieme X, $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(X)$. **V**

► **10.** Siano A, B, C tre insiemi tali che $A \cup B \cup C = C$.

- **V** **F** Allora è necessariamente vero che $A \subseteq C$. **V**
- **V** **F** Allora è necessariamente vero che $C \subseteq A$. **F**
- **V** **F** Allora è necessariamente vero che $B \nsubseteq C$. **F**
- **V** **F** Allora è necessariamente vero che $A \cup B = C$. **F**
- **V** **F** Allora è necessariamente vero che $A \cap B \subseteq C$. **V**

► **11.** Sia λ un numero naturale maggiore o uguale a 3. Siano x, y i numeri naturali le cui espansioni in base λ sono, rispettivamente $(\lambda - 1\ \ \lambda - 2)_\lambda$ e $(1\ \ 2)_\lambda$.

- **V** **F** L'espansione in base λ di $x + y$ *non* è $(1\ 1\ 0)_\lambda$ **F**
- **V** **F** L'espansione in base λ di $x + y$ *non* è $(1\ 1)_\lambda$ **V**
- **V** **F** L'espansione in base λ di $x + y$ *non* è $(1\ 0\ 1)_\lambda$ **V**
- **V** **F** Per ogni $\lambda \geq 3$ si ha $\mathrm{MCD}(x + y, \lambda) = 1$. **F**
- **V** **F** Per ogni $\lambda \geq 3$ si ha $\mathrm{MCD}(x + y + 1, \lambda) = 1$. **V**

Nota. L'espansione in base λ di $x + y$ è $(1\ 1\ 0)_\lambda$ (essendo $x + y = [(\lambda - 1)\cdot\lambda + (\lambda - 2)\cdot 1] + [1\cdot\lambda + 2\cdot 1] = \lambda^2 + \lambda$).

► **12.** Sia λ un numero intero.

- **V** **F** Al variare di $\lambda \in \mathbb{Z}$, il $\mathrm{MCD}(6\lambda + 5, \lambda + 1)$ assume almeno due valori positivi distinti. **F**
- **V** **F** Esiste $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale che l'equazione diofantea $(6\lambda + 5)X + (\lambda + 1)Y = 2015$ ammette soluzioni in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. **V**
- **V** **F** Esiste $\lambda \in \mathbb{Z}$ tale che l'equazione diofantea $(6\lambda + 5)X + (\lambda + 1)Y = 2015$ *non* ammette soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. **F**
- **V** **F** L'equazione diofantea $2\lambda X + 2^{\lambda^2} Y = 2\lambda + 2015$ *non* ammette soluzioni per ogni $\lambda \in \mathbb{Z}$. **V**
- **V** **F** L'equazione diofantea $(6\lambda + 5)X + 2^{\lambda^2} Y = \lambda^2$ ammette soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{Z}$. **V**